N° d'Ordre : D.U. 1865

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R Sciences et Technologies

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

N° 584

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : Mathématiques Pures

Par **OJEDA FUENTEALBA Jacqueline Alejandra**

DISTRIBUTION DE VALEURS DES FONCTIONS MEROMORPHES ULTRAMETRIQUES, APPLICATION DE LA THEORIE DE NEVANLINNA

Soutenue publiquement le 21 Octobre 2008, devant la commission d'examen

Président :	Gilles CHRISTOL	(Rapporteur)
Examinateurs :	Abdelbaki BOUTABAA	
	Bertin DIARRA	
	Michel WALDSCHMIDT	
	Jésus ARAUJO	(Rapporteur)
	Jean Paul BEZIVIN	(Rapporteur)
Directeur de Thèse :	Alain ESCASSUT	

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Alain ESCASSUT, pour avoir dirigé ce travail, pour les connaissances qu'il m'a transmises pendant le développement de cette thèse, pour sa disponibilité et son soutien permanent. Je le remercie aussi son aide précieuse qui m'a permis de résoudre des petits soucis de la vie quotidienne et tous ses cours improvisés de français et d'anglais...

J'exprime ma plus vive gratitude à Monsieur José AGUAYO, Professeur à l'Université de Concepción au Chili, pour son initiation - il y a quelques années - à l'analyse p-adique, mais surtout pour la confiance déposée en moi, une aide précieuse.

Je remercie le Gouvernement Chilien (programme spécial DLF 22) pour le financement de mon séjour en France durant ces années d'études. Je remercie aussi le Laboratoire de Mathématiques et l'Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales de l'Université Blaise Pascal, et le Conseil Municipal de la Mairie de Clermont-Ferrand pour leur soutien.

Je suis très honorée par la présence de Monsieur Jésus ARAUJO, Monsieur Jean-Paul BEZIVIN et Monsieur Gilles CHRISTOL - président du jury - et je leur adresse toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs. Je les remercie aussi pour leurs pertinentes remarques et suggestions constructives qui ont contribué à améliorer cette thèse. Ma gratitude et mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Abdelbaki BOUTABAA, Monsieur Bertin DIARRA et Monsieur Michel WALDSCHMIDT, pour avoir accepté gentillement de participer à ce jury.

Je ne remercierai jamais assez à Sanae MOUDNIB, Fatoumata DIABY, Françoise OUEDRAOGO, Noëlle ROUGANNE et Remedios RODRIGUEZ. Je leur exprime fond mon attachement. Leurs rencontres m'ont permis des moments partagés privilégiés, ils resteront inoubliables. MERCI pour leur précieuse écoute et leurs encouragements chaleureux.

J'adresse ma profonde reconnaissance et mes sentiments d'amitié à la famille Sierra-Paycha. Merci pour les longues promenades sur les Puys et pour les dîners en famille. La sagesse de Celio, la tendresse et l'énergie d'Oriel resteront toujours dans mes plus profondes pensées.

Je tiens à adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques, notamment à son directeur, Monsieur Youcef AMIRAT. Je tiens à témoigner de mes sentiments les meilleurs à mes amis, compagnons de thèse ou rencontres heureuses, en particulier pour Eva BAMIO, Hajer JEBALI, Veronica HANHAUSEN, Rodrigo NOSEDA, Jérome DUBOIS, Frédéric MAURIN, Frédérique D'AUVERGNE, Fana TANGARA, Hamadoun MAIGA, Jéremy RUIZ, Moustafa HAIJA et Nicolas JAMES.

Mes remerciements seraient incomplets si je ne remerciais pas chaleureusement ma famille et mes amis chiliens, permettez-moi de le faire en espagnol. Hay veces que la distancia pone a prueba los sentimientos más puros y esos detalles de la vida diaria que muchas veces parecen innecesarios se vuelven indispensables, por ello deseo agradecer profundamente a aquellos que de una u otra manera me brindaron su apoyo, en particular, a mis queridos padres : Sr. Osvaldo OJEDA y Sra. Elisa FUENTEALBA. Agradezco también a Sr. Marcial SILVA, Sra. Erika TORRES, Srta. Myriam ORTEGA y Srta. Miryam VICENTE.

Table des matières

Introduction

Cette thèse se place dans le domaine de la distribution de valeurs des fonctions méromorphes. On se propose d'étudier des propriétés des fonctions méromorphes dans un corps ultramétrique complet, algébriquement clos de caractéristique 0 qui sera noté $\mathbb{K}$ (ex : $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$), ainsi que des propriétés des fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$.

Beaucoup d'études ont été faites au cours de ces dernières années sur la distribution de valeurs des fonctions méromorphes complexes, notamment de la part de G. Gundersen, M. Reinders, E. Mues, G. Franck, C.C. Yang, Ping Li, Liangwen Wao, Ilpo Laine..., etc. Les problèmes étudiés concernent d'une part la répartition des zéros de fonctions méromorphes complexes et d'autre part des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes complexes satisfaisant certaines équations fonctionnelles.

Il était donc naturel d'examiner des problèmes analogues de distributions des zéros pour différents types de fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$: par exemple, leurs valeurs exceptionnelles. De même, des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$, qui satisfont certaines conditions : par exemple, qui partagent une fonction méromorphe en prenant ou non en compte les multiplicités. Ce dernier type de problème comporte naturellement des liens avec les problèmes portant sur les polynômes d'unicité pour des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ [24], [37], et aussi avec les ensembles d'unicité (URSCM) [22] dans $\mathbb{K}$.

Plus généralement, ces travaux sont en relation avec ceux effectués ces dernières années en distribution de valeurs pour des fonctions méromorphes ultramétriques, exposés notamment aux congrès de l'AMS à Phoenix en 2004 et San Antonio en 2006 et aux derniers congrès d'analyse p-adique (Clermont-Ferrand (2004), Concepción (2006-Chili) et Lansing (2008-EEUU)). Les chercheurs les plus en vue dans ce domaine sont W. Cherry et Min Ru (Texas), Pitman Wong, C.C. Yang (Hong Kong), Peichu Hu (Chine), Julie Wang (Taiwan), Ta Thi Hoai An (Vietnam), ainsi que A. Boutabaa et A. Escassut.

La méthode la plus utilisée dans ce travail est la *Théorie de Nevanlinna ultramétrique*, due à A. Boutabaa [10], qui s'applique non seulement à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais aussi aux fonctions méromorphes *non bornées* dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$. Les théorèmes les plus fréquemment utilisés sont le *Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna* [15] ainsi que le *Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions* [39], avec toutes ses applications, notamment aux fonctions entières ou analytiques dans un disque ouvert.

Le premier et le deuxième chapitre sont essentiellement destinés à rappeler des propriétés classiques des éléments analytiques (dans un disque, dans une couronne) et leurs applications aux fonctions analytiques et méromorphes ultramétriques. En général on donne seulement la référence bibliographique de ces résultats car en principe ils sont bien connus des spécialistes. Néanmoins, si la référence n'est pas spécifiée, ils constituent des résultats originaux (ou tout au moins, des résultats que l'on n'a pas trouvés dans les ouvrages déjà publiés...). Par exemple dans la Section 1.7 du Chapitre 1, on introduit la définition des *valeurs spéciales* d'une fonction méromorphe et on s'intéresse à ces valeurs pour une fonction méromorphe ultramétrique et sa dérivée. Dans la Section 2.2 du Chapitre 2, on montre une inégalité de Milloux pour les fonctions ultramétriques, on donne des propriétés des petites fonctions, notamment le Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions [39], et on rappelle le classique problème de Lazard [44] sur les zéros des fonctions analytiques dans un disque ouvert qu'on peut contourner, dans nos travaux, en considérant une extension de $\mathbb{K}$ sphériquement complète [21]. Dans ces derniers cas on donne tous les détails des démonstrations.

Dans le Chapitre 3, on s'intéresse à la distribution des zéros de fonctions méromorphes, en particulier à la *Conjecture de Hayman ultramétrique* : la répartition des zéros de la fonction $f' + \mathcal{T} f^m$ où f est méromorphe dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert, et $\mathcal{T}$ est une fonction rationnelle. On montre que la conjecture de Hayman est résolue pour $m = 1$ et $m \geq 5$, et on donne des solutions particulières, en utilisant des *fonctions méromorphes optimales*, quand $m = 3$ ou $m = 4$. Le cas $m = 2$ reste une question ouverte. Puis on étudie un problème voisin : la répartition des zéros de fonctions de la forme $\alpha_1 P'(f)f' - \alpha_2$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que P' n'ait que 2 zéros distincts, et où α_1 et α_2 sont des petites fonctions par rapport à f. On montre que, par exemple, la fonction $P'(f)f' - \alpha$ admet une infinité de zéros quand f est une fonction analytique transcendante dans $\mathbb{K}$ ou non bornée dans un disque ouvert et que le degré du polynôme P' est au moins 2, ou bien quand f est une fonction méromorphe transcendante dans $\mathbb{K}$ ou non bornée dans un disque ouvert et que le degré du polynôme P' est au moins 4.

Dans le Chapitre 4, on s'intéresse à des problèmes d'unicité pour des fonctions de la forme $f'f^n$ et $g'g^n$ qui partagent une fonction constante, en comptant ou non les multiplicités. Si f et g partagent une constante , en comptant les multiplicités, on montre que $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$, quand f et g sont des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ ou non bornées dans un disque ouvert et $n \geq 11$. On montre aussi que $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$, quand f et g sont des fonctions analytiques dans $\mathbb{K}$ ou non bornées dans un disque ouvert et $n \geq 4$. On obtient également des résultats dans le cas où les fonctions partagent une constante sans prendre en compte les multiplicités (un problème qui, bien sûr, s'apparente à celui des URSIM). D'autre part suivant une série de problèmes nouveaux dans $\mathbb{C}$, on s'intéresse à des problèmes d'unicité pour des fonctions de la forme $P'(f)f'$ et $P'(g)g'$ qui partagent une petite fonction α en comptant les multiplicités : $f = g$ si f et g sont des fonctions méromorphes transcendantes dans $\mathbb{K}$ et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que P' admette exactement deux zéros distincts chacun d'ordre au moins 2. Mais si l'un des zéros de P' est d'ordre 1, alors f et g ne sont pas nécessairement égaux. On montre à cette occasion que les polynômes P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que P' admette exactement deux zéros distincts dont l'un est d'ordre 2 et l'autre d'ordre au moins 3 sont des *polynômes d'unicité* pour les fonctions méromorphes non bornées dans un disque ouvert, ce qui rapproche ce problème de ceux concernant les fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$.

Finalement, dans le Chapitre 5, on s'interesse à l'existence ou non de solutions pour des équations fonctionnelles du type Diophantien. Dans un corps ultramétrique $\mathbb{K}$, le *Théorème de Picard-Berkovich* [9] montre qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ qui satisfont l'équation $F(x, y) = 0$ d'une courbe algébrique de genre ≥ 1. Ici, on étudie l'existence ou non de *solutions admissibles* pour des équations fonctionnelles du type $P(x) = Q(y)$ où P et Q sont des polynômes dont les coefficients sont des fonctions méromorphes et on donne des conditions suffisantes pour montrer qu'il n'existe aucune paire de *solutions admissibles* pour une telle équation et, s'il existe une paire de *solutions admissibles* pour une telle équation, elle a une forme très particulière. Le sujet de ce chapitre avait été aimablement proposé par Monsieur C. C. Yang pendant un séjour à l'Université Blaise Pascal en Juillet 2006.

Chapitre 1

Propriétés des fonctions méromorphes ultramétriques

Ce chapitre est essentiellement destiné à rappeler des propriétés déjà connues des fonctions analytiques ultramétriques (dans un disque, dans une couronne, dans le corps tout entier) et leurs applications aux fonctions méromorphes ultramétriques.

En effet l'abondance des résultats, en principe bien connus des spécialistes, nécessaires dans la suite de ces travaux, rendait souhaitable une compilation initiale des propriétés classiques de ces fonctions. En général, on donne seulement des références bibliographiques, par exemple [21] ou [23], dans le cas où le lecteur souhaite approfondir les démonstrations. Néanmoins, la Section 1.7 comporte une étude des *valeurs spéciales* de fonctions méromorphes comportant des résultats originaux et on donne alors tous les détails des démonstrations.

1.1 Valuation ultramétrique

D'abord on a besoin de rappeler quelques définitions basiques qui concernent des corps ultramétriques et aussi quelques propriétés immédiates de polynômes sur ce corps.

Définition. Soit L un corps. Une *valeur absolue ultramétrique* sur L est une application $|\cdot| : L \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in L.$

(ii) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0 \quad \forall x \in L.$

(iii) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} \quad \forall x, y \in L.$

(iv) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in L.$

La propriété (*iii*) est connue comme *l'inégalité triangulaire forte*. De plus, il est facile à montrer que si $|\cdot|$ est valeur absolue ultramétrique sur L et $a, b \in L$ tels que $|a| < |b|$, alors $|b - a| = |b|$.

Exemple. Soit p un nombre premier et soit $\pi \in]1, +\infty[$. Remarquons que chaque $n \in \mathbb{Z}^*$ peut être écrit d'une façon unique sous la forme $p^s q$ où $q \in \mathbb{Z}^*$, et p et q premiers entre eux. En prenant $|n|_p = \pi^{-s}$, on montre facilement que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.

Notation. Soit L un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique non-triviale $|\cdot|$. On note $\mathcal{U}_L$ l'ensemble $\{x \in L : |x| \leq 1\}$ et $\mathcal{W}_L$ l'ensemble $\{x \in L : |x| < 1\}$. Alors, $\mathcal{U}_L$ est un sous-anneau local de L appelé *anneau de valuation de* L et $\mathcal{W}_L$ est son idéal maximal. $\mathcal{L} = \dfrac{\mathcal{U}_L}{\mathcal{W}_L}$ est appelé *le corps résiduel de* L. Pour tout $a \in L$, on note $\overline{a}$ *la classe résiduelle de* a. La caractéristique de $\mathcal{L}$ est appelé *la caractéristique résiduelle de* L.

On note log une fonction logarithmique réelle de base $\pi > 1$ et on pose $v(x) = -\log |x|$ $\forall x \in L$. Cette fonction v, définie sur L, est appelé *la valuation associée à la valeur absolue* $|\cdot|$. Soit $L^* = L \setminus \{0\}$. Alors $|L^*|$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ et l'image de L^* par la valuation v est alors un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ qui est appelé *le groupe de valuation de* L. La valuation de L est appelée *discrète* si son groupe de valuation est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. De plus, si le groupe de valuation est dense dans $\mathbb{R}$, alors la valuation est appelée *dense*.

Lemme 1.1.1. (Lemme 1.5 [21]) *Si L est un corps algébriquement clos, alors son groupe de valuation est dense dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.1.1. (Théorème 1.3 [21]) *Soit L un corps complet pour une valeur absolue non-triviale et soit F une extension algébrique de L. Alors il existe un unique prolongement de la valeur absolue de L à F.*

Remarque. En prenant en compte l'exemple précédent et en posant $\left|\dfrac{a}{b}\right|_p = \dfrac{|a|_p}{|b|_p}$, on voit que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ qu'on appelle *la valeur absolue p-adique*. $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}$ par rapport à cette valeur absolue. Le corps résiduel de $\mathbb{Q}$ est le corps fini $\mathbb{F}_p$ et la caractéristique résiduelle de $\mathbb{Q}$ est p. Soit $\mathbb{Q}_p$ la complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valeur absolue p-adique et soit $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathbb{C}_p$ la complétion de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$. $\mathbb{C}_p$ est un corps algébriquement clos [21].

1.2 Polynômes

Notation. À partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$. On note $v(x) = -\log|x|$, $x \in \mathbb{K}$, la valuation associée à cette valeur absolue.

Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in]0, R[$. Soit $\theta \in \mathbb{K}$. On note $d(\theta, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{K} : |x-\theta| \leq r\}$ et l'on appelle *disque fermé*, on note $d(\theta, r^-)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{K} : |x-\theta| < r\}$ et l'on appelle *disque ouvert* et on note $C(\theta, r) = d(\theta, r) \setminus d(\theta, r^-)$ *le cercle de centre θ et rayon r*. Soient $r_1, r_2 \in]0, R[$ tels que $r_1 < r_2$, on note $\Gamma(\theta, r_1, r_2)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{K} : r_1 < |x-\theta| < r_2\}$ et l'on appelle *couronne*.

En utilisant des propriétés associées à une valuation ultramétrique, on montre, par exemple, que si $b \in d(\theta, r)$ alors $d(b, r) = d(\theta, r)$. De même, si $b \in d(\theta, r^-)$ alors $d(b, r^-) = d(\theta, r^-)$. De plus, si deux disques D_1 et D_2 sont tels que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ alors ou bien $D_1 \subset D_2$ ou bien $D_2 \subset D_1$.

Par ailleurs, les disques $d(b, r^-)$ contenus dans $d(a, r)$ $\big($resp. dans $C(a, r)\big)$ sont les disques $d(b, r^-)$ tels que $b \in d(a, r)$ $\big($resp. $b \in C(a, r)\big)$. On les appelle *les classes de $d(a, r)$* $\big($resp. *de $C(a, r)$*$\big)$.

Définition. Soit $P(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$. Alors, on définit $\|P\| := \sup_{0 \leq j \leq q} |a_j|$.

Lemme 1.2.1. $\big($Lemme 4.1 [21]$\big)$ *$\|\cdot\|$ est une norme multiplicative. Elle est appelée la norme de Gauss.*

Théorème 1.2.1. $\big($Lemmes 4.2 - 4.3 [21]$\big)$ *Soit $P(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ non nul et soit $r \in]0, +\infty[$. Alors $|P(x)|$ admet une limite $|P|(r)$ quand $|x|$ tend vers r mais $|x| \neq r$ et $|P|(r) = \max_{0 \leq j \leq q} |a_j| r^j$. De même, pour $a \in d(0, r)$, $|P(x)|$ admet la même limite $|P|(r)$ quand $|x-a|$ tend vers r mais $|x-a| \neq r$.*

Soit $x \in d(0, r)$. Alors $|P(x)| \leq |P|(r)$. Si P n'a pas de zéros dans la classe de x dans $d(0, r)$, alors $|P(x)| = |P|(r)$. Si P admet au moins un zéro dans cette classe, alors $|P(x)| < |P|(r)$.

La fonction qui va de $\mathbb{K}[x]$ sur $\mathbb{R}_+$ définie par $P \mapsto |P|(r)$ est une valeur absolue sur $\mathbb{K}[x]$ qui prolonge celle de $\mathbb{K}$.

Le corollaire suivant est une application immédiate des Théorèmes 1.2.1.

Corollaire 1.2.1.1. (Lemmes 4.2 - 4.3 [21]) *Soit* $h \in \mathbb{K}(x)$ *et soit* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour chaque* $a \in d(0,r)$, *on a* $\lim\limits_{|x-a|\to r; |x-a|\neq r} |h(x)| = |h|(r)$.

Soit $x \in C(0,r)$. *Si* h *n'a ni zéros, ni pôles dans la classe de* x *dans* $C(0,r)$, *alors* $|h(x)| = |h|(r)$.

Théorème 1.2.2. (Théorème 4.5 [21]) *Soit* $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j x^j$ *un polynôme unitaire sur* $\mathbb{K}[x]$, *tel que chaque* $a_j \in d(0,1)$. *Alors les* q *zéros du polynôme* P *appartiennent au disque* $d(0,1)$.

Remarque. Ces valeurs absolues ultramétriques définies sur $\mathbb{K}[x]$ sont prolongées d'une façon naturelle aux valeurs absolues ultramétriques définies sur $\mathbb{K}(x)$ par $\left|\dfrac{P}{Q}\right|(r) = \dfrac{|P|(r)}{|Q|(r)}$.

Notation. Soit $h \in \mathbb{K}(x)$ et soit $r \in]0,+\infty[$. On note $v(h, -\log r) := -\log\big(|h|(r)\big)$.

Lemme 1.2.2. (Lemmes 4.7 - 4.8 [21]) *Soit* $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ *non nul et soit* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors* $v(P, -\log r) = \inf\limits_{0\leq j\leq q} v(a_j) - j\log r$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, *on a* $v\big(P(x)\big) \geq v\big(P, -\log r\big)$. *De plus,* $v\big(P(x)\big) = v\big(P, -\log r\big)$ *si et seulement si* P *n'a pas de zéros* β *tels que* $v(x) < v(x-\beta)$, *c'est-à-dire que* $v\big(P(x)\big) = v\big(P, -\log r\big)$ *si et seulement si* x *n'appartient pas à la classe des* β.

Soit $h \in \mathbb{K}(x)$ *non nulle et soit* $x \in \mathbb{K}$. *Si* h *n'a pas de zéros* β *tels que* $v(x-\beta) > v(x)$ *et* h *n'a pas de pôles* γ *tels que* $v(x-\gamma) > v(x)$, *alors* $v\big(h(x)\big) = v\big(h, -\log r\big)$.

Lemme 1.2.3. (Lemme 4.9 [21]) *Soient* $h_1, h_2 \in \mathbb{K}(x)$ *non nulles et soit* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors* $v(h_1+h_2, -\log r) \geq \min\big\{v(h_1, -\log r), v(h_2, -\log r)\big\}$ *et si* $v(h_1, -\log r) < v(h_2, -\log r)$, *on a* $v(h_1+h_2, -\log r) = v(h_1, -\log r)$. *De plus*

$$v(h_1 \cdot h_2, -\log r) = v(h_1, -\log r) + v(h_2, -\log r).$$

Notation. Soit $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ non nul et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\nu^+(P,r)$ (resp. $\nu^-(P,r)$) le plus grand (resp. le plus petit) indice $j \in \mathbb{N}$ tel que $v(a_j) - j\log r = v(P, -\log r)$. Si $\nu^+(P,r) = \nu^-(P,r)$, on écrit simplement $\nu(r,f)$.

Théorème 1.2.3. $\big($Théorème 4.11 [21]$\big)$ *Soit* $P(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ *non nul. Pour chaque* $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\nu^+(P,r) - \nu^-(P,r)$ *est égal au nombre de zéros de* P *dans le cercle* $C(0,r)$. *La fonction* $\nu^+(P,\cdot)$ $\big($*resp.* $\nu^-(P,\cdot)\big)$ *est décroissante et continue à gauche* $\big($*resp. à droite*$\big)$. *De plus, pour* $Q \in \mathbb{K}[x]$, *on a* $\nu^+(P \cdot Q, r) = \nu^+(P,r) + \nu^+(Q,r)$ *et* $\nu^-(P \cdot Q, r) = \nu^-(P,r) + \nu^-(Q,r)$.

D'autre part, la fonction $v(P,\cdot)$ *définie par* $-\log r \mapsto v(P, -\log r)$ *est continue, affine par morceaux, croissante, concave et dérivable à gauche et à droite en chaque point* $-\log r$. *Sa dérive à gauche en* $-\log r$ *est égale à* $\nu^+(P,r)$ *et sa dérivée à droite en* $-\log r$ *est égale à* $\nu^-(P,r)$.

Remarque. La représentation de la fonction $v(P,\cdot)$ est connue en analyse ultramétrique comme *"polygone de valuation"*.

Le corollaire suivant est une généralisation du théorème précédent aux fonctions rationnelles et pour le montrer on applique le Lemme 1.2.2 et le Théorème 1.2.3 au numérateur et au dénominateur de cette fonction rationnelle.

Corollaire 1.2.3.1. $\big($Corollaire 4.12 [21]$\big)$ *Soit* $h \in \mathbb{K}(x)$ *non nulle et* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *La fonction* $v(h,\cdot)$ *est continue et affine par morceaux.*

Si le disque $d(0,r)$ *contient* s *zéros et* t *pôles de* h, *en prenant en compte les multiplicités, mais si* h *n'a ni zéros ni pôles dans* $C(0,r)$, *alors* $v(h,\cdot)$ *est dérivable en* $-\log r$ *et sa dérivée est égale à* $s - t$.

Si le cercle $C(0,r)$ *contient* s *zéros et* t *pôles de* h, *en prenant en compte les multiplicités, alors* $\nu^+(h,r) - \nu^-(h,r) = s - t$. *De plus, si la fonction* $v(h,\cdot)$ *est non dérivable en* $-\log r$, *alors* $-\log r \in v(\mathbb{K})$.

D'après le Lemme 1.2.2, on obtient aussi le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.3.2. $\big($Théorème 4.13 [21]$\big)$ *Soit* $h \in \mathbb{K}(x)$ *et soient* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $r_1 < r_2$. *Si* h *admet* s *zéros et* t *pôles dans* $d(0,r_1)$ *et si* h *n'a ni zéros ni pôles dans* $\Gamma(0,r_1,r_2)$, *alors* $v\big(h(x)\big)$ *est de la forme* $A + (s-t)v(x)$ *sur la couronne* $\Gamma(0,r_1,r_2)$.

Exemples :

(a) Soient $r, s \in]0,+\infty[$ tels que $r < s$, et soit $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ où $a_0 \neq 0$.

- (i) Supposons $|a_0| = |a_1|r > |a_2|r^2$, on a $|P(x)| = |a_0|$. Donc $\nu^+(P,r) = 1$ et $\nu^-(P,r) = 0$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,r)$.

(ii) Supposons maintenant $|a_1|s = |a_2|s^2 > |a_0|$. Alors $\nu^+(P,s) = 2$ et $\nu^-(P,s) = 1$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,s)$. D'autre part, $\nu^+\big(P,\rho\big) = \nu^-\big(P,\rho\big) = 1 \;\; \forall \rho \in]r,s[$ et $\nu^+(P,\rho) = \nu^-(P,\rho) = 2 \;\; \forall \rho > s$.

(b) Soit $h(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{(x-p)^2} \in \mathbb{Q}_p(x)$.

(i) Supposons $-\log|x|_p > -\log|p|_p$.
Comme $|x|_p < p^{-1}$, on a $|x|_p < 1$ et donc $|x-1|_p = 1$ et $|x-p|_p = |p|_p = p^{-1}$. Par conséquent $|h(x)|_p = p^2|x|_p$ et alors, pour $-\log|x|_p > 1$, on a $v\big(h, -\log|x|_p\big) = -2 - \log|x|_p$.

(ii) Supposons $0 < -\log|x|_p < -\log|p|_p$.
Comme $1 > |x|_p > p^{-1}$, on en déduit que $|x-1|_p < 1$ et $|x-p|_p = |x|_p$. Par conséquent $|h(x)|_p = \dfrac{1}{|x|_p}$ et alors, pour $0 < -\log|x|_p < -\log|p|_p$, on a $v\big(h, -\log|x|_p\big) = \log|x|_p$.

(iii) Supposons $-\log|x|_p < 0$.
Comme $|x|_p > 1$, on en déduit que $|x-1|_p = |x|_p$ et $|x-p|_p = |x|_p$. Par conséquent $|h(x)|_p = |x|_p$ et alors, pour $-\log|x|_p < 0$, on a $v\big(h, -\log|x|_p\big) = -\log|x|_p$.

1.3 Éléments Analytiques

Définition et Notations. Un ensemble $D \subset \mathbb{K}$ est appelé *infraconnexe* si, pour tout $a \in D$, l'ensemble $I = \overline{\big\{|x-a| : x \in D\big\}}^{\mathbb{R}^+}$ est un intervalle.

D'ici et tout au long de ce chapitre, sauf précision, D est un ensemble ouvert-fermé infraconnexe. On note $R(D)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions rationnelles sans pôles dans D et $R_b(D)$ la sous-$\mathbb{K}$-algèbre des fonctions rationnelles bornées dans D. En particulier, si D est bornée alors $R(D) = R_b(D)$. On note alors $H(D)$ la complétion de $R(D)$ pour la norme de convergence uniforme sur D donnée par

$$\|h\|_D = \sup_{x \in D} |h(x)|, \quad h \in R(D).$$

Cette norme est une norme $\mathbb{K}$-algèbre semi-multiplicative. Les éléments de $H(D)$ sont appelés *éléments analytiques* sur D. On peut montrer aussi que $H(D)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un groupe topologique complet par rapport à la topologie de convergence uniforme sur D.

Lemme 1.3.1. (Lemme 10.3 [21]) *Si* $f \in H(D)$*, alors* $\inf_{x \in D} |f(x)| > 0$ *si et seulement si* f^{-1} *appartient à* $H(D)$*, c'est-à-dire que* f *est inversible dans l'ensemble* $H(D)$.

Théorème 1.3.1. (Théorème 13.1 [21]) *Soit* $r \in]0, +\infty[$. *Alors* $H\big(d(0,r)\big)$ *est l'ensemble des séries entières* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *telles que* $\lim_{n \to +\infty} |a_n| r^n = 0$*, et*

$$\|f\|_{d(0,r)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n = \lim_{|x| \to r,\ |x| < r} |f(x)|.$$

$H\big(\mathbb{K} \setminus d(0,r^-)\big)$ *est l'ensemble des séries de Laurent* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{x^n}$ *telles que* $\lim_{n \to +\infty} |a_n| r^{-n} = 0$ *et*

$$\|f\|_{\mathbb{K} \setminus d(0,r^-)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n = \lim_{|x| \to r,\ |x| > r} |f(x)|.$$

Définition et Notations. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme en analyse archimédienne, si $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, on pose $r = \dfrac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Le nombre r est appelé *le rayon de convergence de* f. Donc, pour $x \in \mathbb{K}$, on a les situations suivantes :

(i) $|x| < r$. Donc $\lim_{n \to +\infty} |a_n||x|^n = 0$ et alors la série est convergente.

(ii) $|x| > r$. Donc la série est divergente.

(iii) $|x| = r$. Donc on peut avoir ou bien $\lim_{n \to +\infty} |a_n||x|^n = 0$ et alors la série est convergente sur la totalité du cercle $C(0,r)$, ou bien $\limsup_{n \to +\infty} |a_n||x|^n \neq 0$ et alors la série est divergente dans le cercle $C(0,r)$.

D'autre part, quand $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, on a $r = 0$ et donc f est convergente seulement quand $x = 0$. Quand $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, on dit que le rayon de convergence de f est égal à $+\infty$ et dans ce cas f est convergente pour tout $x \in \mathbb{K}$.

On note $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ l'ensemble des séries entières en x dont le rayon de convergence est infini et on les appelle *fonctions entières*.

A partir d'ici et tout au long de ce travail, sauf précision, $\theta \in \mathbb{K}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ l'ensemble des séries entières en $x - \theta$ dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à R et on les appelle *fonctions analytiques sur le disque ouvert* $d(\theta, R^-)$.

Proposition 1.3.1. (Proposition 13.3 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalents :*

(i) $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$.

(ii) La série $f(x)$ *est convergente pour tout* $x \in d(\theta, R^-)$.

(iii) $f \in \bigcap_{r'<r} H\big(d(\theta, r')\big)$.

Démonstration. — La preuve découle du fait que *(ii)* et *(iii)* sont équivalents à la condition $\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0$ quand $r \in]0, R[$ et celle-ci est équivalente à $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{1}{R}$. □

Corollaire 1.3.1.1. (Corollaire 13.4 [21]) *Soit* $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ *non nulle. Pour chaque* $\alpha \in d(0, R^-)$, *on a* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-\alpha)^n$. *De plus, si* $f(\alpha) = 0$, α *est un zéro isolé et il existe* $q \in \mathbb{N}$ *unique tel que* f *puisse être écrite dans* $\mathcal{A}(d(0, R^-))$ *sous la forme* $(x-\alpha)^q g(x)$ *où* $g \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ *et* $g(\alpha) \neq 0$.

Définition. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ et soit $\gamma \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\gamma \in d(\theta, R^-)\big)$. Soit $r \in]0, +\infty[$ tel que $d(\gamma, r) \subset \mathbb{K}$ $\big($resp. Soit $r \in]0, R[$ tel que $d(\gamma, r) \subset d(\theta, R^-)\big)$ et soit $f(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} b_n(x-\gamma)^n$ chaque fois que $x \in d(\gamma, r)$, où $b_q(\gamma) \neq 0$ et $q > 0$. On dira que γ est *un zéro de* f *d'ordre de multiplicité* q ou simplement que γ est *un zéro de* f *d'ordre* q. De même, q sera appelé *l'ordre de multiplicité de* γ.

Si f admet un zéro γ d'ordre q, on posera $\omega_\gamma(f) = q$. Si $f(\gamma) \neq 0$, on posera simplement $\omega_\gamma(f) = 0$.

Théorème 1.3.2. (Théorème 13.9 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$. *Alors* f *est bornée dans* $d(\theta, R^-)$ *si et seulement si la suite* $\big(|a_n|R^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi bornée, c'est-à-dire si* $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|R^n < +\infty$. *De plus, si* f *est bornée, alors* $\|f\|_{d(\theta,R^-)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$.

Notation. On note $\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ l'ensemble de séries entières bornées qui convergent dans $d(\theta, R^-)$ et on les appelle *fonctions analytiques bornées* dans le disque $d(\theta, R^-)$. De même, on note $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ l'ensemble $\mathcal{A}(d(\theta, R^-)) \setminus \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ et on les appelle *fonctions non bornées* dans le disque $d(\theta, R^-)$.

Théorème 1.3.3. $\big($Théorème 13.10 [21]$\big)$ *$\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ est une $\mathbb{K}$ sous-algèbre de $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ et c'est une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{d(\theta,R^-)}$.*

Remarque. $\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ contient strictement $H\big(d(\theta, r^-)\big)$.

1.4 Dérivée des fonctions analytiques

Maintenant, quelques rappels à propos des propriétés des fonctions analytiques.

Théorème 1.4.1. $\big($Théorème 13.5 [21]$\big)$ *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in H\big(d(\theta, r)\big)$. La série $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-\theta)^{n-1}$ appartient aussi à $H\big(d(\theta, r)\big)$. Pour chaque $\gamma \in d(\theta, r)$, f est dérivable en γ, f' vérifie $\|f'\|_{d(\theta,r)} \leq \frac{1}{r}\|f\|_{d(\theta,r)}$ et $f'(x) = g(x)$. De plus, si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et si γ est un zéro de f d'ordre de multiplicité égal à q, on a alors $f^{(j)}(\gamma) = 0$ pour chaque $j < q$ et $f^{(q)}(\gamma) \neq 0$.*

Corollaire 1.4.1.1. $\big($Corollaire 13.6 [21]$\big)$ *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n} \in H\big(\mathbb{K} \setminus d(0, r^-)\big)$. La série $g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n a_n}{x^{n+1}}$ appartient aussi à $H\big(\mathbb{K} \setminus d(0, r^-)\big)$. La fonction g est la dérivée de f et f' vérifie $\|f'\|_{\mathbb{K}\setminus d(0,r^-)} \leq \frac{1}{r}\|f\|_{\mathbb{K}\setminus d(0,r^-)}$.*

Le théorème suivant est déduit à partir du Théorème 1.4.1 et du Corollaire 1.4.1.1.

Théorème 1.4.2. $\big($Théorème 13.8 [21]$\big)$ *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$. La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ appartient aussi à $\mathcal{A}(d(0, R^-))$ et elle est égale à la dérivée de f dans*

$d(0,R^-)$. De plus, si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle, le rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

Remarque. Quand la caractéristique de $\mathbb{K}$ est égale à $p \neq 0$, la série entière égale à la dérivée de f peut avoir un rayon de convergence plus grand que celui de f, comme dans le cas suivant : le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{q_n p}$ est 1 tandis que celui de f' est $+\infty$.

Théorème 1.4.3. $\big($Corollaire 13.14 [21]$\big)$ *Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle, alors une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ a une dérivée identiquement nulle si et seulement si f est une constante.*

Si $\mathbb{K}$ a une caractéristique $p \neq 0$, alors une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ a une dérivée identiquement 0 si et seulement s'il existe une fonction $g \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ telle que $f(x) = \big(g(x)\big)^p$.

Démonstration. — La première partie du théorème est obtenue d'après le Théorème 1.4.1, car à partir de celui-là il est possible de montrer que si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle alors $f \in H\big(d(0,r)\big)$ a une dérivée identiquement nulle si et seulement si f est une constante.

Dans la deuxième partie du théorème, la condition nécessaire est immédiate. Pour la condition suffisante, on pose $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^{jp}$ où $\lim_{j\to+\infty} |a_j| r^{jp} = 0$ et on construit une suite $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ telle que, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $(c_j)^p = a_j$. Alors $\lim_{j\to+\infty} |c_j| r^j = 0$. En considérant ces éléments, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ laquelle appartient à $H\big(d(0,r)\big)$ et puisque la caractéristique de $\mathbb{K}$ est $p \neq 0$ la conclusion est déduite. $\square$

Notation. Soit $r \in]0,+\infty[$ et soit $f \in H(D)$. On pose

$$v(f, -\log r) = \begin{cases} -\log\big(|f|(r)\big) & , \text{si } |f|(r) \neq 0 \\ +\infty & , \text{si } |f|(r) = 0 \end{cases}$$

En généralisant la notation introduite pour les polynômes, on note $\nu^+(f,r)$ $\big($resp. $\nu^-(f,r)\big)$ le plus grand (resp. le plus petit) entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que

$$v(a_j) - j\log r = \inf_{n\in\mathbb{N}} v(a_n) - n\log r,$$

c'est-à-dire que $|a_j| r^j = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| r^n$. Si $\nu^+(f,r) = \nu^-(f,r)$, on écrit simplement $\nu(f,r)$.

Lemme 1.4.1. (Lemme 20.5 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in H\big(C(\theta,r)\big)$. *L'ensemble* $\Big\{j \in \mathbb{N} \ : \ \inf_{n\in\mathbb{Z}} \big\{v(a_n) - n\log r\big\} = v(a_j) - j\log r\Big\}$ *est un ensemble fini.*

Proposition 1.4.1. (Proposition 20.7 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in H\big(C(\theta,r)\big)$. *Alors* $v(f,-\log r) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} v(a_n) - n\log r$ *et on a* $v\big(f(x)\big) \geq v(f,-\log r) \ \ \forall x \in C(\theta,r)$. *De plus, l'égalité est vraie dans toutes les classes de* $C(\theta,r)$ *sauf dans un nombre fini.*

D'autre part, si $\nu^+(f,r) = \nu^-(f,r)$ *alors* $v\big(f(x)\big) = v(f,-\log r) \ \ \forall x \in C(\theta,r)$.

La proposition suivante généralise la proposition précédente, en utilisant les séries de Laurent sur une couronne.

Proposition 1.4.2. (Proposition 20.8 [21]) *Soit* $r \in]0,+\infty[$ *et soient* $r_1, r_2 \in]0,r[$ *tels que* $r_1 < r_2$. *Soit* $f(x) \in H\big(\Gamma(\theta,r_1,r_2)\big)$ *et soit* $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n$ *sa série de Laurent. La fonction* $-\log r \mapsto v(f,-\log r)$ *est bornée dans* $]r_1,r_2[$ *et égale à* $\inf_{n\in\mathbb{Z}} v(a_n) - n\log r$. *De plus,* $v\big(f(x)\big) \geq \big(f,-\log r\big)$ *quand* $x \in \Gamma(\theta,r_1,r_2)$ *et l'égalité est vraie dans toutes les classes de* $\Gamma(\theta,r_1,r_2)$. *La fonction* $v(f,\cdot)$ *est dérivable à gauche en* $-\log r$ *et sa dérivée est égale à* $\nu^+(f,r)$. *De même,* $v(f,\cdot)$ *est dérivable aussi à droite en* $-\log r$ *et sa dérivée est égale à* $\nu^-(f,r)$. *Si la fonction* $v(f,-\log r)$ *n'est pas dérivable en* $-\log r$ *alors* $-\log r$ *est un élément de* $v(\mathbb{K})$. *De plus, la fonction* $v(f,\cdot)$ *est concave dans* $]r_1,r_2[$.

Proposition 1.4.3. (Proposition 20.9 [21]) *Soit* $r \in]0,+\infty[$ *et soient* $f,g \in H\big(C(\theta,r)\big)$. *Alors* $\nu^+(fg,r) = \nu^+(f,r) + \nu^+(g,r)$ *et* $\nu^-(fg,r) = \nu^-(f,r) + \nu^-(g,r)$. *De plus, si* f *est inversible dans* $H\big(C(\theta,r)\big)$, *alors* $\nu^+(f,r) = \nu^-(f,r) = -\nu^+\big(\frac{1}{f},r\big) = -\nu^-\big(\frac{1}{f},r\big)$.

Démonstration. — La première partie de la démonstration découle des Propositions 1.4.1 et 1.4.2, en considérant d'abord $f,g \in R\big(C(\theta,r)\big)$ et du fait qu'il existe une couronne $\Gamma(\theta,r_1,r_2) \subset C(\theta,r)$ telle que $f,g \in R\big(\Gamma(\theta,r_1,r_2)\big)$. Ensuite le résultat peut être étendu à $H\big(C(\theta,r)\big)$.

Supposons $\frac{1}{f} \in H\big(C(\theta,r)\big)$. D'après la première partie de la proposition, on a $\nu^+(f,r) = -\nu^+\big(\frac{1}{f},r\big)$ et $\nu^-(f,r) = -\nu^-\big(\frac{1}{f},r\big)$. De plus, par définition, $\nu^+(f,r) \geq \nu^-(f,r)$ $\forall f \in H\big(C(\theta,r)\big)$. Ainsi $\nu^+(f,r) = \nu^-(f,r)$. □

Théorème 1.4.4. (Théorème 14.1 [21]) *Soit* $\gamma \in D$ *et soit* $f \in H(D)$ *tel que* $f(\gamma) = 0$. *Alors* f *peut être factorisé dans* $H(D)$ *sous la forme* $(x-\gamma)g$ *où* $g \in H(D)$. *S'il n'existe aucun voisinage* V *de* γ *tel que* $f(x) = 0$ *quand* $x \in V$, *alors il existe un unique entier* $q \in \mathbb{N}$ *et* $h \in H(D)$ *tel que* $f(x) = (x-\gamma)^q h(x)$ *et* $h(\gamma) \neq 0$.

Corollaire 1.4.4.1. (Corollaire 14.2 [21]) *Soit* $f \in H(D)$ *et soit* γ *un zéro de* f *dans* D. *Alors il existe un disque* $d(\gamma, r)$ *tel que* $f(x) \neq 0$ *quand* $x \in d(\gamma, r) \setminus \{\gamma\}$ *ou bien il existe un disque* $d(\gamma, r)$ *tel que* $f(x) = 0$ *dans* $d(\gamma, r)$.

Définition. Soit $A \subset D$ et soit $f \in H(D)$ ayant un nombre fini de zéros $\gamma_1, ..., \gamma_n$ dans A avec ordre de multiplicité $q_1, ..., q_n$ respectivement. Le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(x-\gamma_i)^{q_i}$ sera appelé *le polynôme des zéros de* f *dans* A.

Corollaire 1.4.4.2. (Corollaire 14.5 [21]) *Soit* $A \subset D$ *et soit* $f \in H(D)$ *ayant un nombre fini de zéros dans* A. *Soit* P *le polynôme des zéros de* f *dans* A. *Alors* f *peut être factorisé sous la forme* $f = Pg$ *où* $g \in H(D)$ *et* $g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in A$.

1.5 Zéros des fonctions analytiques

Dans cette section on étudiera le comportement des séries entières et des séries de Laurent. Particulièrement, on étudiera le lien qui existe entre le polygone de valuation et leurs zéros.

Théorème 1.5.1. (Théorème 23.1 [21]) *Soit* $f \in H\big(C(0,r)\big)$. *Le nombre de zéros de* f *dans* $C(0,r)$, *en prenant en compte les multiplicités, est égal à* $\nu^+(f,r) - \nu^-(f,r)$.

Corollaire 1.5.1.1. (Corollaire 23.2 [21]) *Soit* $f \in H\big(C(0,r)\big)$ *ayant* q *zéros in* $C(0,r)$, *en prenant en compte les multiplicités et soit* $t = \nu^-(f,r)$. *Alors* $r = \sqrt[q]{|\frac{a_t}{a_{q+t}}|}$.

Théorème 1.5.2. (Théorème 23.3 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in H\big(C(\theta,r)\big)$ *n'ayant pas de zéros dans* $C(\theta,r)$ *et soit* $q = \nu^+(f,r)$. *Alors* $\nu^+(f,r) = \nu^-(f,r)$ *et* $|f(x)| = |f|(r)$ *quand* $x \in C(\theta,r)$

Théorème 1.5.3. $\big($Théorème 23.4 [21]$\big)$ *Soit* $r \in]0, +\infty[$ *et soient* $r_1, r_2 \in]0, r[$ *tels que* $r_1 < r_2$. *Soit* $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x-\theta)^n \in H\big(\Gamma(\theta, r_1, r_2)\big)$ *n'ayant pas de zéros dans* $\Gamma(\theta, r_1, r_2)$. *Alors* $\nu^+(f, \rho) = \nu^-(f, \rho) = q \in \mathbb{Z}$ *quand* $\rho \in]r_1, r_2[$ *et* $|f(x)| = |a_q(x-\theta)^q|$ *quand* $x \in \Gamma(\theta, r_1, r_2)$.

Théorème 1.5.4. $\big($Théorèmes 23.5 - 23.6 [21]$\big)$ *Soit* $f \in H\big(d(\theta, r)\big)$. *Le nombre de zéros de* f *dans* $d(\theta, r)$, *en prenant en compte les multiplicités, est égal à* $\nu^+(f, r)$. *Supposons maintenant* $\Lambda = d(\theta, r)$ *ou* $\Lambda = d(\theta, r^-)$. *Si* $f \in H(\Lambda)$ *n'a pas de zéros dans* Λ *alors* $\nu(f, \rho) = 0 \ \ \forall \rho \in]0, r[$ *et* $|f(x)|$ *est égal à une constante dans* Λ.

Démonstration. — La deuxième partie du théorème découle du fait que si $\Lambda = d(\theta, r)$ ou $\Lambda = d(\theta, r^-)$, le nombre de zéros de f dans Λ est égal à $\nu^+(f, r)$ et alors $\nu^+(f, \rho) = \nu^-(f, \rho)$ quand $\rho \in]0, r[$. Par conséquent, d'après le Théorème 1.4.2, la dérivée de $v(f, -\log r)$ est égale à 0 et donc cette fonction est égale à une constante dans $]0, r[$. Alors $v\big(f(x)\big) = v\big(f, -\log r\big)$ et ainsi $v\big(f(x)\big)$ est égal à une constante dans Λ. □

Théorème 1.5.5. $\big($Théorème 23.7 [21]$\big)$ *Soit* $\Lambda = d(\theta, r)$ *ou* $\Lambda = d(\theta, r^-)$ *ou* $\Lambda = C(\theta, r)$. *Soit* $f \in H(\Lambda)$ *non nulle et soit* $h \in H(\Lambda)$ *satisfaisant* $|f - h|(r) < |f|(r)$ *pour* r *assez grand. Alors* f *et* h *ont le même nombre de zéros dans* Λ, *en prenant en compte les multiplicités.*

Démonstration. — Puisque $|f - h|(r) < |f|(r)$ pour r assez grand, on a $v(f - h, -\log r) > v(f, -\log r)$ et donc $\nu^+(f, r) = \nu^+(h, r)$ et $\nu^-(f, r) = \nu^-(h, r)$, d'après les Théorèmes 1.5.1 et 1.5.4, on déduit que f a le même nombre de zéros que h dans $\Lambda = d(0, r)$ ou $\Lambda = C(0, r)$. Pour le cas $\Lambda = d(0, r^-)$ le théorème découle du Théorème 22.9 [21] et du fait qu'il existe un disque $d(0, \rho) \subset \Lambda$ tel que h contienne tous les zéros de h dans Λ : f et h ont le même nombre de zéro dans $d(0, \rho)$ et f n'a pas de zéros dans $C(0, s)$ quand $s \in]\rho, r[$. □

Corollaire 1.5.5.1. $\big($Corollaire 23.8 [21]$\big)$ *Soit* $\Lambda = d(\theta, r)$ *ou* $\Lambda = d(\theta, r^-)$ *ou* $\Lambda = C(\theta, r)$ *et soit* $\Lambda \subset D$. *Un élément* $f \in H(D)$ *a seulement un nombre fini de zéros dans* Λ *et peut être factorisé sous la forme* $f = Pg$ *où* $P \in \mathbb{K}[x]$ *est le polynôme unitaire des zéros de* f *dans* Λ *et* $g \in H(D)$ *est telle que* $g(x) \neq 0$ *quand* $x \in \Lambda$. *De plus, si* $f \in H\big(C(0, r)\big)$ *alors* $|f(x)| \leq |f|(r) \ \ \forall x \in C(0, r)$ *et* $|f(x)| = |f|(r)$ *dans toutes les classes qui ne contiennent pas de zéros de* f.

Corollaire 1.5.5.2. $\big($Corollaire 23.9 [21]$\big)$ *Soit* $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ *ayant un nombre infini de zéros dans* $d(\theta, R^-)$. *Alors l'ensemble des zéros de* f *dans* $d(\theta, R^-)$ *est une suite* $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *telle que* $\lim_{n \to +\infty} |\gamma_n - \theta| = R$.

Théorème 1.5.6. (Théorème 23.10 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$*. Alors* f *a un nombre fini de zéros dans* $d(0, R^-)$ *si et seulement si il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $|a_q|R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$.

De plus, si $t \in \mathbb{N}$ *est le plus petit de tous les entiers* q *tel que* $|a_q|R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$*, alors* f *a exactement* t *zéros dans le disque* $d(0, R^-)$*.*

Démonstration. — Supposons que $t \in \mathbb{N}$ est le plus petit de tous les entiers q tel que $|a_q|R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$. Alors $|a_n|R^n < |a_t|R^t \quad \forall n < t$. Donc, pour chaque $n < t$, il existe $\rho(n) \in]0, R[$ tel que $|a_t|r^t > |a_n|r^n \quad \forall r \in]\rho(n), R[$. Posons $\rho = \max_{n<t} \rho(n)$. Alors, pour tout $r \in]\rho, R[$, on a $|a_t|r^t > |a_n|r^n$ si $n < t$. D'autre part, pour $r \in]0, R[$, on a $|a_n|r^n < |a_t|r^t$ si $n \geq t + 1$ parce que $|a_t|R^t \leq |a_n|R^n$ et $n > t$. Par conséquent, on en déduit que $\nu^+(f, r) = \nu^-(f, r) = t \quad \forall r \in]\rho, R[$, ce qui entraîne que f a exactement t zéros dans le disque $d(0, R^-)$, en prenant en compte les multiplicités. $\square$

D'après le Théorèmes 1.3.2 et 1.5.5, les corollaires suivants sont immédiats.

Corollaire 1.5.6.1. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ *non constante. Alors* f *admet au moins un zéro dans* $\mathbb{K}$*. De plus, si* f *n'est pas un polynôme, alors* f *a une infinité de zéros dans* $\mathbb{K}$

Corollaire 1.5.6.2. (Corollaire 23.11 [21]) *Soit* $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$*, alors* f *a une infinité de zéros dans* $d(\theta, R^-))$*.*

Remarque. Une fonction $f \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ peut aussi avoir une infinité de zéros dans $d(\theta, R^-)$.

Théorème 1.5.7. (Théorème 23.16 [21]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *n'a pas de zéros dans le disque* $d(0, R^-)$*.*

(ii) $|f(x)|$ *est égal à une constante non nulle dans le disque* $d(0, R^-)$*.*

(iii) f *est inversible sur* $\mathcal{A}_b(d(0, R^-))$*.*

Démonstration. — Supposons que f n'a pas de zéros dans $d(0, R^-)$. Alors, d'après le théorème précédent, on a $|a_0| > |a_n|r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne $|f(x)| = |a_0| \quad \forall x \in d(0, R^-)$ et on obtient (ii).

Supposons, maintenant, que $|f(x)|$ est égal à une constante non nulle dans le disque $d(0,R^-)$. Donc, pour chaque $r \in]0,R[$, la fonction f appartient à $H\big(d(0,r)\big)$ et donc, d'après le Lemme 1.3.1, la fonction f est inversible sur $H\big(d(0,r)\big)$. Par conséquent $f^{-1} \in H\big(d(0,r)\big)$ pour chaque $r \in]0,R[$ et alors $f^{-1} \in \mathcal{A}_b(d(0,R^-))$, ce qui entraîne (iii).

Finalement, si f est inversible sur $\mathcal{A}_b(d(0,R^-))$ la condition (i) est évidente, c'est-à-dire que f n'a pas de zéros dans le disque $d(0,R^-)$. □

Théorème 1.5.8. (Lemme 23.12 [21]) *Soit $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ et soient $r_1, r_2 \in]0,R[$ tels que $r_1 < r_2$. Si la fonction f admet q zéros dans le disque $d(0,r_1)$, en prenant en compte les multiplicités, et si f n'admet pas de zéros dans la couronne $\Gamma(0,r_1,r_2)$, alors elle satisfait que* $\dfrac{|f|(r_2)}{|f|(r_1)} = \Big(\dfrac{r_2}{r_1}\Big)^q$.

Démonstration. — Puisque f n'admet pas de zéros dans la couronne $\Gamma(0,r_1,r_2)$, on a $\nu^+(f,r_1) = q$ et donc, d'après le Théorème 1.5.2, on voit que

$$v(f,-\log r) - v(f,-\log r_1) = \big(v(a_q) - q\log r\big) - \big(v(a_q) - q\log r_1\big) = q(\log r_1 - \log r)$$

pour tout $r \in]r_1,r_2[$. Donc, par continuité, on obtient que

$$v(f,-\log r_2) - v(f,-\log r_1) = q(\log r_1 - \log r_2),$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 1.5.9. (Théorème 23.13 [21]) *Soit $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ et soient $r_1, r_2 \in]0,R[$ tels que $r_1 < r_2$. Si f admet q zéros dans le disque $d(0,r_1)$, en prenant en compte les multiplicités, et t zéros différents $\gamma_1,\dots,\gamma_t$ avec ordre de multiplicité s_i $(1 \le i \le t)$ respectivement dans $\Gamma(0,r_1,r_2)$ et tels que $|\gamma_i| \le |\gamma_{i+1}|$ $(1 \le i \le t)$, alors f satisfait*

$$v(f,-\log r_2) - v(f,-\log r_1) = -\sum_{i=1}^{t} s_i\big(v(\gamma_j) + \log r_2\big) - q\big(\log r_2 - \log r_1\big).$$

Démonstration. — Pour chaque $1 \le i \le t-1$, posons m_i le nombre de zéros de f dans le disque $d(0,|\gamma_i|)$, en comptant les multiplicités. Donc, d'après le Théorème précédent, on obtient

$$\begin{aligned} v\big(f,v(\gamma_{i+1})\big) - v\big(f,v(\gamma_j)\big) &= m_i\big(v(\gamma_{i+1}) - v(\gamma_i)\big), \\ v\big(f,v(\gamma_1)\big) - v(f,-\log r_1) &= q\big(v(\gamma_1) + \log r_1\big), \\ v(f,-\log r_2) - v\big(f,v(\gamma_t)\big) &= m_t\big(-\log r_2 - v(\gamma_t)\big). \end{aligned}$$

Par conséquent, par récurrence, on obtient l'égalité désirée. □

D'après le Corollaire 1.5.6.2 et le Théorème 1.5.9, on obtient le Corollaire suivant :

Corollaire 1.5.9.1. (Corollaire 23.14 [21]) *Soit $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ telle que l'ensemble des zéros de f dans $d(\theta, R^-)$ est une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ordre de multiplicité de chaque γ_n est s_n respectivement. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\gamma_n - \theta| = R$. De plus, $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ si et seulement si la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^{s_n} = 0$.*

Pour énoncer le prochain théorème on aura besoin de la définition suivante.

Définition. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, R[$ est appelée *suite à distance croissante* si la suite $|a_{n+1} - a_n|$ est strictement croissante et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.5.10. (Théorème 23.15 [21]) *Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$. L'ensemble des zéros de f dans le disque $d(0, R^-)$ est une suite de zéros simples à distance croissante si et seulement si la suite $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ l'est aussi. De plus, si la propriété précédente est satisfaite, alors la suite de zéros de f dans le disque $d(0, R^-)$ est une suite $(\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|\gamma_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\gamma_n| = R$.*

1.5.1 Image d'un disque

L'image d'un disque fermé $d(0, r)$ par un élément analytique est un disque de même nature et l'image d'un disque ouvert $d(0, r^-)$ par un élément analytique ou par une fonction analytique bornée est aussi un disque de même nature.

Théorème 1.5.11. (Théorème 26.1 [21]) *Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in H\big(d(0, r)\big)$ et soit $t = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| r^n$. Alors $f\big(d(0, r)\big) = d(a_0, t)$ et $|f - a_0|(r) = t$.*

Corollaire 1.5.11.1. (Corollaire 26.2 [21]) *Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$ et soit $t = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| R^n$. Si $t > 0$ alors $f\big(d(0, R^-)\big) = d(a_0, t^-)$.*

Corollaire 1.5.11.2. *Soit* $f \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$. *Alors* $f\big(d(0,R^-)\big) = \mathbb{K}$.

Lemme 1.5.1. (Lemme 26.5 [21]) *Soit* $f \in H\big(d(0,r)\big)$ *satisfaisant* $\nu^+(f,r) \geq 1$ *et soit* $b \in f\big(d(0,r)\big)$. *Si* $g = f - b$ *alors* $\nu^+(g,r) = \nu^+(f,r)$.

Lemme 1.5.2. (Lemme 26.6 [21]) *Soit* $f \in H\big(d(0,r)\big)$ *ayant* $s \geq 1$ *zéros dans le disque* $d(0,r)$*, en prenant en compte les multiplicités, et soit* $b \in f\big(d(0,r)\big)$. *Alors* $f - b$ *admet aussi* s *zéros dans le disque* $d(0,r)$*, en prenant en compte les multiplicités.*

Lemme 1.5.3. (Lemme 26.7 [21]) *Soit* $f \in H\big(d(0,r)\big)$ *et soit* $s = \nu^+(f,r)$ *où* $s \geq 1$. *Soient* $\gamma_1, ..., \gamma_q$ *les zéros de* f' *dans le disque* $d(0,r)$. *Pour chaque* $b \in f\big(d(0,r)\big) \setminus f\big(\{\gamma_1, ..., \gamma_q\}\big)$, $f - b$ *admet exactement* s *zéros simples dans le disque* $d(0,r)$.

1.6 Le problème de Lazard

Notations et Définition. Une application T définie dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta,R^-)\big)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est appelée un *diviseur sur* $\mathbb{K}$ $\big($resp. *sur* $d(\theta,R^-)\big)$ si son support est dénombrable et s'il a une intersection finie avec chaque disque $d(\theta,r)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$. Alors, un diviseur sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. sur $d(\theta,R^-)\big)$ est caractérisé par une suite $(\gamma_n,q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $q_n \in \mathbb{N}$ et $\gamma_n \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\gamma_n| = +\infty$ $\big($resp. $\gamma_n \in d(\theta,R^-)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\gamma_n| = R\big)$ et $|\gamma_n| \leq |\gamma_{n+1}|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Régulièrement on identifie un diviseur avec la suite $(\gamma_n,q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui le caractérise.

L'ensemble des diviseurs sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. sur $d(\theta,R^-)\big)$ est pourvu d'une loi d'addition naturelle et aussi d'une relation d'ordre naturelle. Soient T et T' deux diviseurs. Alors

$$T(\gamma) \leq T'(\gamma) \quad \forall \gamma \in d(\theta,R^-) \implies T \leq T'.$$

De plus, si T et T' sont deux diviseurs tels que $T(\gamma) \geq T'(\gamma)$ $\forall \gamma \in d(\theta,R^-)$, on peut définir le diviseur $T - T'$.

Maintenant nous pouvons définir le diviseur d'une fonction analytique. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(\theta,R^-))\big)$. On définit *le diviseur* $\mathcal{D}(f)$ *sur* $\mathbb{K}$ $\big($resp. *sur* $d(\theta,R^-)\big)$ comme

$$\mathcal{D}(f)(\gamma) = \begin{cases} s & \text{si } f(\gamma) = 0 \ \text{ avec } \ \omega_\gamma(f) = s \\ 0 & \text{si } f(\gamma) \neq 0 \end{cases}$$

De même, on définit le diviseur $\overline{\mathcal{D}}(f)$ sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. *sur* $d(\theta, R^-)\big)$ comme

$$\overline{\mathcal{D}}(f)(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\gamma) = 0 \\ 0 & \text{si } f(\gamma) \neq 0 \end{cases}$$

Soit $T = (\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un diviseur sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. sur $d(\theta, R^-)\big)$. Supposons que $\gamma_n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$ on pose $|T|(r) = \prod_{|\gamma_i|\leq r} \left(\frac{r}{|\gamma_i|}\right)^{q_i}$. Un diviseur T sur $d(\theta, R^-) \setminus \{0\}$ est appelé *un diviseur borné* si $\lim_{r\to R^-} |T|(r) < +\infty$ et alors, on pose $\|T\| = \lim_{r\to R^-} |T|(r)$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ et soit $\mathcal{D}(f) = (\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_{\gamma_n}(f) = q_n$ et $\omega_\gamma(f) = 0 \ \ \forall\gamma \in d(\theta, R^-) \setminus \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1.6.1 Le problème de Lazard

En 1962, M. Lazard [44] pose la question suivante :

Soit $(\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite contenue dans* $\mathbb{K} \setminus \{0\} \times \mathbb{N}$ $\big($*resp.* $d(\theta, R^-) \setminus \{0\} \times \mathbb{N}\big)$. *Existe-t-il une fonction* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ *qui a exactement à chaque* γ_n *comme un zéro d'ordre* q_n *?*

En utilisant la définition de diviseur sur un corps donnée ci-dessus, le problème précedent est équivalent à :

Soit T *un diviseur sur* $\mathbb{K}$ $\big($*resp. sur* $d(\theta, R^-)\big)$. *Existe-t-il une fonction une fonction* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ *telle que* $\mathcal{D}(f) = T$ *?*

Le Théorème 1.6.1 et le Corollaire 1.6.1.1 ci-dessous permettent de donner une réponse positive dans le cas $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que pour tout diviseur $T = (\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_n| = +\infty$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{D}(f)$ est exactement égal à T. On donne seulement un résumé de la démonstration .

Théorème 1.6.1. $\big($Théorème 2.1.6 [25]$\big)$ *Soit* $(\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{K} \setminus \{0\} \times \mathbb{N}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_n| = +\infty$. *Alors* $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_n}\right)^{q_n}$ *converge uniformément sur tout ensemble borné de* $\mathbb{K}$ *et il définit une fonction* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ *qui admet chaque* γ_n *comme un zéro d'ordre de multiplicité* q_n *et qui n'admet aucun autre zéro.*

Démonstration. — Supposons $|\gamma_n| \leq |\gamma_{n+1}|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Posons $f_m(x) = \prod_{n=1}^{m}\Big(1 - \dfrac{x}{\gamma_n}\Big)^{q_n}$. Soit $\rho \in]0, +\infty[$ fixé et soit $N \in \mathbb{N}$ tels que $|\alpha_N| > \rho$. On remarque que $|f_m|(\rho) = |f_N|(\rho)$ $\forall m \geq N$. Posons $M = |f_N|(\rho)$. On peut montrer que $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leq M\dfrac{\rho}{|\gamma_{m+1}|}$ $\forall x \in d(0, \rho)$ et donc $|f_{m+1} - f_m|(\rho) \leq M\dfrac{\rho}{|\gamma_{m+1}|}$, ce qui entraîne que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $d(0, \rho)$ vers un élément de $H\big(d(0, \rho)\big)$ et donc vers une série entière. Puisque cela est valable pour tout $\rho \in]0, +\infty[$, il existe $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telle que la suite (f_m) converge vers f uniformément dans tout le disque $d(0, \rho)$. Maintenant, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, posons $r_m = |\gamma_m|$. De plus, les zéros de f_m dans $d(0, r_m)$ sont les γ_n $(1 \leq n \leq m)$ avec ordre de multiplicité q_n respectivement. Ensuite $\Big|\Big(1 - \dfrac{x}{\gamma_n}\Big)^{q_n}\Big| = 1$ $\forall n > m$ $\forall x \in d(0, r_m)$. Ainsi, les zéros de f dans le disque $d(0, r_m)$ sont exactement les zéros de f_m, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.6.1.1. (Corollaire 2.1.7 [25]) *Soit $T = (\gamma_n, q_n)$ un diviseur sur $\mathbb{K}$ où $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telle que $T = \mathcal{D}(f)$. De plus, si $f(0) = 1$, alors $|f|(r) = |T|(r)$ $\forall r \in]0, +\infty[$.*

On aborde maintenant le problème sur le disque $d(\theta, R^-)$. D'abord on montrera quelques résultats donnés par A. Escassut [25] qui construit une fonction $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ dont le diviseur est plus grand que le diviseur donné mais approche celui-ci.

Lemme 1.6.1. (Lemme 2.2.1 [25]) *Soit $T = (\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un diviseur sur $d(\theta, R^-)$ où $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ satisfaisant $f(0) = 1$, $\mathcal{D}(f) \geq T$ et $|f|(r) = |T|(r)$ $\forall r \in]0, R[$. Alors $\mathcal{D}(f) = T$.*

Lemme 1.6.2. (Lemme 2.2.2 [25]) *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$. Soit $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$ et soit $B > A$. Il existe une suite croissante $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n\lambda_n \leq B$.*

Théorème 1.6.2. (Théorème 2.2.3 [25]) *Soit $T = (\gamma_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un diviseur sur $d(\theta, R^-)$ où $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ telle que $f(0) = 1$, $\mathcal{D}(f) \geq T$ et $|f|(r) \leq |T|(r)(1 + \varepsilon)$ $\forall r \in]0, R[$.*

Pour aborder d'une façon plus précise le problème de la recherche d'un fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ admettant pour diviseur un diviseur donné T sur $d(\theta, R^-)$, on introduit la définition suivante :

Définition. Un corps ultramétrique L est appelé *sphériquement complet* si toute suite décroissante de disques contenue dans L a une intersection non vide.

Le problème a été abordé par M. Lazard dans [44] qui montre que la réponse dépend du corps $\mathbb{K}$ suivant qu'il est ou non sphériquement complet.

Théorème 1.6.3. (Théorème 2.3.1 [25]) *Soit $\mathbb{K}$ un corps qui n'est pas sphériquement complet. Il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $d(0, R^-)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\gamma_n| = R$ et telle qu'il n'existe aucune une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ qui admette $T = (\gamma_n, 1)_{n\in\mathbb{N}}$ pour diviseur.*

Démonstration. — Puisque $\mathbb{K}$ n'est pas un corps sphériquement complet, il existe une suite décroissante de disques $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ telle que $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} D_n = \emptyset$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(D_n) = \dfrac{1}{R}$. Par ailleurs, sans perte de généralité, on suppose $R > 1$. Alors $\dfrac{1}{R} < 1 < R$ et ainsi, on peut considérer que $D_0 \subset d(0, R^-)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = \operatorname{diam}(D_n)$. Donc $r_n > r_{n+1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère $\gamma_n \in D_n \setminus D_{n+1}$. En posant $\beta_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$, on obtient que $r_{n+1} < |\beta_n| \leq r_n$.

On suppose maintenant qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ qui admet pour diviseur $T = \left(\dfrac{1}{\beta_n}, 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, sans perte de généralité, on peut poser $f = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} (1 - \beta_n x)$ et, par conséquent, $f(x)$ peut être écrite sous la forme $1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Ensuite, on montre que $\gamma_1 - a_1 \in D_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} D_n = \emptyset$, ce qui achève la démonstration. □

Définition. Soit $r \in]0, +\infty[$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ est appelé *polynôme r-extrémal* si tous ses zéros sont dans le cercle $C(0, r)$.

Soit $f \in H\big(C(0, r)\big)$ et soit $P \in \mathbb{K}[x]$ r-extrémal. On appelle *division r-extrémale* l'opération de trouver une fonction $g \in H\big(C(0, r)\big)$ et un polynôme $R \in \mathbb{K}[x]$ qui satisfont

$f = Pg + Q$ où $\deg(P) > \deg(Q)$, $|P|(r) \geq |Q|(r)$ et $|P|(r) \geq |g|(r)$.

Théorème 1.6.4. (Théorème 2.3.4 [25]) *Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps sphériquement complet. Soit T un diviseur sur $d(0, R^-)$ et $P \in \mathbb{K}[x]$ r-extrémal. Il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ qui satisfait*

(i) $f(0) = 1$,

(ii) $|f|(r) \leq |T|(r) \quad \forall r \in]0, R[$,

(iii) *P divise f dans $\mathcal{A}(d(0, R^-))$.*

Démonstration. — La démonstration initiale de ce théorème a été d'abord donnée par M. Lazard [44] et ensuite a été reécrite par L. Haddad dans un document personnel repris par A. Escassut dans [25]. Cela consiste à construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lesquelles appartiennent à $\mathcal{A}(d(0, R^-))$ et qui convergent dans $\mathcal{A}(d(0, R^-))$ vers une fonction f et qui satisfont (i), (ii) et (iii). □

En suite, le théorème qui permet de donner une réponse positive à notre problème.

Théorème 1.6.5. (Théorème 2.3.7 [25]) *Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps sphériquement complet. Pour tout diviseur T sur $d(0, R^-)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ telle que $\mathcal{D}(f) = T$.*

Démonstration. — Soit $T = (\gamma_n, q_n)$ un diviseur sur $d(0, R^-)$ où $\gamma_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\gamma_i}\right)^{q_i} \in \mathbb{K}[x]$ r-extrémal. D'après le Théorème 1.6.4, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ telle que $f(0) = 1$, $|f|(r) \leq |T|(r)$ $\forall r \in]0, R[$ et P divise f dans $\mathcal{A}(d(0, R^-))$. De cette dernière propriété, on déduit que $\mathcal{D}(f) \geq T$. Ensuite, pour montrer que $\mathcal{D}(f) \leq T$, on suppose que $T \neq \mathcal{D}(f)$ et on conclut que $|f|(r) > |T|(r) \quad \forall r \in]0, R[$, ce qui contredit l'hypothèse et, par conséquent, on obtient la conclusion desirée. □

1.7 Fonctions méromorphes ultramétriques

Notation. On note $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))$) le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $d(\theta, R^-)$), c'est-à-dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))$). En considérant la $\mathbb{K}$-sous-algèbre $\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ des fonctions analytiques bornées dans le disque $d(\theta, R^-)$, on note $\mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$ son corps de fractions. Finalement, on note $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ l'ensemble des *fonctions méromorphes non-bornées dans le disque $d(\theta, R^-)$* qui est par définition $\mathcal{M}(d(\theta, R^-)) \setminus \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$.

La valeur absolue $|\cdot|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. sur $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ quand $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$, s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. à $\mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ en posant $|f|(r)=\dfrac{|h|(r)}{|l|(r)}$ quand $f=\dfrac{h}{l}$ et $h,\ l\in\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h,\ l\in\mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$. La valuation $v(\cdot,-\log r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. sur $\mathcal{A}(d(\theta,R^-))\big)$ s'étend aussi d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. à $\mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ en posant $v\Big(\dfrac{h}{l},-\log r\Big)=v(h,-\log r)-v(l,-\log r)$ où $h,\ l\in\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h,\ l\in\mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$.

Le théorème et le corollaire suivants nous permettent d'appliquer les propriétés des éléments analytiques à des fonctions méromorphes.

Théorème 1.7.1. $\big($Théorème 2.4.1 [25]$\big)$ *Soient* $r,s\in]0,R[$ *tels que* $r\le s$. *Soit* $f\in\mathcal{A}(d(\theta,R^-))$ *non nulle et soient* $\gamma_1,...,\gamma_q$ *les zéros de* f *dans le disque* $d(\theta,s)$. *Soit* $D=\big\{x\in d(a,s): |x-\gamma_i|\ge r\ \forall i=1,...,q\big\}$. *Alors* $\dfrac{1}{f}$ *appartient à* $H(D)$.

Corollaire 1.7.1.1. $\big($Corollaire 2.4.2 [25]$\big)$ *Soient* $r,s\in]0,R[$ *tels que* $r\le s$. *Soit* $f\in\mathcal{M}(d(\theta,R^-))$ *non nulle et soient* $\beta_1,...,\beta_q$ *les pôles de* f *dans le disque* $d(\theta,s)$. *Soit* $D=\big\{x\in d(a,s): |x-\beta_i|\ge r\ \forall i=1,...,q\big\}$. *Alors* f *appartient à* $H(D)$.

Le Théorème qu'on énonce ci-dessous sera très utilisé dans les prochains chapitres et il est une généralisation du Théorème 1.4.1.

Théorème 1.7.2. $\big($Lemme 4 [13]$\big)$ *Soit* $f\in\mathcal{M}(d(\theta,R^-))$. *Pour tout* $r\in]0,R[$, *on a* $|f'|(r)\le\dfrac{1}{r}|f|(r)$.

Démonstration. — Posons $f=\dfrac{h}{l}$ où $h,l\in\mathcal{A}(d(\theta,R^-))$. Pour $r\in]0,R[$, on a $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)}=\dfrac{|h'l-hl'|(r)}{|hl|(r)}$ mais évidemment $|h'l-hl'|(r)\le\max\big\{|h'l|(r),\ |hl'|(r)\big\}$, ce qui entraîne que $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)}\le\max\left\{\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)},\ \dfrac{|l'|(r)}{|l|(r)}\right\}$. Alors, d'après le Théorème 1.4.1, on a $\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)}\le\dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|l'|(r)}{|l|(r)}\le\dfrac{1}{r}$, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 1.7.3. $\big($Théorème 2.1.1 [25]$\big)$ *Soit* $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f\in\mathcal{M}(d(\theta,R^-))\big)$ *localement constante. Alors* f *est constante dans* $\mathbb{K}$ $\big($*resp. dans* $d(\theta,R^-)\big)$.

Démonstration. — La démonstration découle du fait que les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe non nulle sont isolés et par conséquent si la fonction est constante dans un disque, elle est constante sur tout son ensemble de définition. □

Théorème 1.7.4. (Théorème 2.1.2 [25]) *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$) sans pôles dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $d(\theta, R^-)$). Alors $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$).*

Démonstration. — Ici il suffit de montrer que, pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), la fonction f appartient à $H\big(d(\theta, r)\big)$. Pour montrer cela on écrit f sous la forme $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$) et donc, pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R^-[$), les fonctions h, l appartiennent à $H\big(d(\theta, r)\big)$ et ensuite on utilise le fait qu'elles peuvent être écrites sous la forme $P\phi$ et $Q\psi$ respectivement où ϕ et ψ sont inversibles dans $H\big(d(\theta, r)\big)$ et P et Q sont polynômes dont les zéros appartiennent à $d(\theta, r)$. □

Corollaire 1.7.4.1. (Corollaire 2.1.3 [25]) *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$) n'ayant ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $d(\theta, R^-)$). Alors f est une constante (resp. est un élément inversible de $\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$).*

Corollaire 1.7.4.2. (Corollaire 2.1.4 [25]) *Soient $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$) deux fonctions qui ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. Alors $\dfrac{h}{l}$ est une constante (resp. est un élément inversible de $\mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$).*

1.7.1 Application du problème de Lazard à des fonctions méromorphes sur un disque

Les théorèmes suivants permettront de supposer, sans perte de généralité, dans les démons-trations à venir que toute fonction $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ pourra être écrite comme le quotient de deux fonctions $h, l \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ sans zéros communs ce qui n'est pas toujours possible, comme on a vu précédemment. Le premier théorème est un résultat bien connu (voir [21] sur une démonstration de Bertin Diarra).

Théorème 1.7.5. (Théorème 7.4 [21]) *Soit L un corps ultramétrique algébriquement clos. Alors L admet une extension algébriquement close sphériquement complète.*

Notation. Puisque $\mathbb{K}$ satisfait les hypothèses du Théorème 1.7.5, il admet une extension algébriquement close sphériquement complète. On note $\widehat{\mathbb{K}}$ cette extension de $\mathbb{K}$ et on note $\widehat{d}(\theta, R^-)$ le disque ouvert $\{x \in \widehat{\mathbb{K}} : |x - \theta| < R\}$ contenu dans $\widehat{\mathbb{K}}$.

Lemme 1.7.1. *Soit $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ et soit $\widehat{f}$ la fonction définie par f dans $\widehat{d}(\theta, R^-)$. Les zéros de $\widehat{f}$ dans $\widehat{d}(\theta, R^-)$ sont exactement les zéros de f dans $d(\theta, R^-)$ en prenant en compte les multiplicités.*

Démonstration. — Soit $r \in]0, R[$. D'après le Corollaire 1.5.5.1, f peut être factorisée dans le disque $d(\theta, r)$ sous la forme $f(x) = P_r(x)h_r(x)$ où $P_r \in \mathbb{K}[x]$ est unitaire ayant tous ses zéros dans $d(\theta, r)$, et $h \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ est telle que $h_r(x) \neq 0 \ \ \forall x \in d(\theta, r)$.

Supposons $h_r(x) = a_0 + a_1(x - \theta) + ...$ D'après le Théorème 1.5.6, on en déduit que $|a_0| > |a_k|r^k \ \ \forall k \geq 1$. D'où $h_r(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \widehat{d}(\theta, r)$. Alors la factorisation de f et $\widehat{f}$ est la même dans tout $d(\theta, r)$ avec $r \in]0, R[$. Par conséquent $\widehat{P}_r = P_r$, ce qui entraîne que f et $\widehat{f}$ ont les mêmes zéros dans $d(\theta, R^-)$, en comptant les multiplicités. □

Le Théorème suivant est immédiat d'après le Théorèmes 1.7.5 et le Lemme 1.7.1.

Théorème 1.7.6. *Soit $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ et soit $\widehat{f}$ la fonction méromorphe définie par f dans $\widehat{d}(\theta, R^-) \subset \widehat{\mathbb{K}}$. Alors, les zéros et les pôles de $\widehat{f}$ dans $\widehat{d}(\theta, R^-)$ sont exactement les mêmes zéros et les mêmes pôles que ceux de f dans $d(\theta, R^-)$, en comptant les multiplicités.*

Remarque. Soit $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ et soit $\widehat{f}$ la fonction méromorphe définie par f dans $\widehat{d}(\theta, R^-) \subset \widehat{\mathbb{K}}$. D'après le Théorème 1.7.5, la fonction $\widehat{f}$ peut être écrite sous la forme $\dfrac{h_0}{l_0}$ où $h_0, l_0 \in \mathcal{A}(\widehat{d}(\theta, R^-))$ sans zéros communs. De plus, d'après le Théorème 1.7.6, tous les zéros et tous les pôles de $\widehat{f}$ sont dans $\mathbb{K}$. Donc, d'après le Théorème 1.6.2, il existe une fonction $h \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ telle que $\widehat{h} \in \mathcal{A}(\widehat{d}(\theta, R^-))$ satisfait

(*i*) h_0 divise $\widehat{h}$ dans $\mathcal{A}(\widehat{d}(\theta, R^-))$.

(*ii*) La fonction $\phi = \dfrac{\widehat{h}}{h_0}$ appartient à $\mathcal{A}_b(\widehat{d}(\theta, R^-))$.

Alors, on pose $l = \phi l_0 \in \mathcal{A}(\widehat{d}(\theta, R^-))$. De plus, on peut vérifier que l a tous ses coefficients dans $\mathbb{K}$ car $f = \dfrac{h}{l}$ donc $l = fh \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ n'a pas de pôles dans $d(\theta, R^-)$.

1.7.2 Valeurs spéciales des fonctions méromorphes

Définition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$ $\Big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = R\Big)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le disque $d(a_n, |a_n|^-)$ respectif. On appelle *partie canonique de* $\mathbb{K}$ $\big($resp. de $d(0, R^-)\big)$ tout sous-ensemble de $\mathbb{K}$ $\big($resp. de

$d(0,R^-)\big)$ de la forme $\mathbb{K}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ $\Big($resp. $d(0,R)\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\Big)$. Notons $\mathcal{F}_\infty$ $\big($resp. $\mathcal{F}_R\big)$ le filtre qui a pour base la famille des parties canoniques de $\mathbb{K}$ $\big($resp. de $d(0,R^-)\big)$.

(*i*) Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$. Alors $b\in\mathbb{K}$ est appelé *une valeur exceptionnelle de Picard* de f (ou seulement *une valeur exceptionnelle*) si $f(x)\neq b\ \ \forall x\in\mathbb{K}$ $\big($resp $f(x)\neq b\ \ \forall x\in d(0,R^-)\big)$.

(*ii*) Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})\setminus\mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$. Alors $b\in\mathbb{K}$ est appelé *une valeur quasi-exceptionnelle* de f si la fonction $f-b$ admet seulement un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0,R^-)\big)$.

(*iii*) Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$. Alors $b\in\mathbb{K}$ est appelé *une valeur spéciale* de f si $\lim\limits_{r\to+\infty}|f-b|(r)=0$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-}|f-b|(r)=0\Big)$.

D'après l'unicité de la limite d'une fonction et d'après le Théorème 1.5.3, le théorème suivant est immédiat :

Théorème 1.7.7. *Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$. Si f admet une valeur spéciale $b\in\mathbb{K}$, celle-ci est unique. De plus, f admet une valeur spéciale $b\in\mathbb{K}$ si et seulement si $f-b$ tend vers 0 suivant $\mathcal{F}_\infty$ $\big($resp. suivant $\mathcal{F}_R\big)$.*

Démonstration. — La première partie du Théorème est immédiate à partir du fait que si la limite d'une fonction existe, elle est unique.

Montrons maintenant la deuxième partie du Théorème. Supposons que $\lim\limits_{\mathcal{F}_\infty} f-b=0$. Alors, il existe une suite croissante $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=+\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=R\big)$ telle que, la fonction $f-b$ n'a ni zéros ni pôles dans la couronne $\Gamma(\theta,r_n,r_{n+1})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et donc, d'après le Théorème 1.5.3, on a $|(f-b)(x)|=|f-b|(r)\ \ \forall r\in]r_n,r_{n+1}[\ \forall n\in\mathbb{N}$. Par conséquent, on déduit que $\lim\limits_{r\to+\infty}|f-b|(r)=0$ $\big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-}|f-b|(r)=0\big)$. Réciproquement, supposons que b est une valeur spéciale de f. Supposons, sans perte de généralité, que $b=0$. On a donc $\lim\limits_{r\to+\infty}|f|(r)=0$ $\big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-}|f|(r)=0)$. Soit

$$D=\big\{x\in\mathbb{K}:|x-a|\geq|a| \text{ pour tout zero |a| et pour tout pole } |a| \text{ de } f\big\}$$

$$\big(\text{resp. } D=\big\{x\in d(\theta,R^-):|x-a|\geq|a| \text{ pour tout zero } |a| \text{ et pour tout pole } |a| \text{ de } f\big\}\big).$$

On voit que D appartient à $\mathcal{F}_\infty$ $\big($resp. à $\mathcal{F}_R\big)$. Or, dans chaque classe de chaque cercle $C(\theta,r)$ où $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$, qui est incluse dans D, on voit que $|f(x)|=|f|(r)$, d'où $\lim\limits_{\mathcal{F}_\infty} f(x)=0$ $\big($resp. $\lim\limits_{\mathcal{F}_R} f(x)=0\big)$. $\square$

Théorème 1.7.8. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $b \in \mathbb{K}$. Si f est non constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et si b est une valeur exceptionnelle de f alors b est une valeur spéciale de f. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et si b est une valeur quasi-exceptionnelle de f alors b est une valeur spéciale de f.*

Démonstration. — D'abord supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est non constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et que b est une valeur exceptionnelle de f. Puisque $f - b \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ sans zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$, la fonction $\dfrac{1}{f-b}$ est une fonction sans poles dans $\mathbb{K}$ et alors $\dfrac{1}{f-b} \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est non constante $\Big($resp. $\dfrac{1}{f-b} \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\Big)$. Par conséquent, d'après le Corollaire 1.5.6.1 $\big($resp. Corollaire 1.5.6.2$\big)$, on a $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \Big|\frac{1}{f-b}\Big|(r) = +\infty$ $\Big($resp. $\displaystyle\lim_{r\to R^-} \Big|\frac{1}{f-b}\Big|(r) = +\infty$ $\Big)$, ce qui achève la première partie de la démonstration.

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et que b est une valeur quasi-exceptionnelle de f. Alors, il existe $P \in \mathbb{K}[x]$ et $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $l \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ tels que $f = \dfrac{P}{l}$ et donc, on obtient $f - b = \dfrac{P - bl}{l}$. Puisque $P \in \mathbb{K}[x]$ et $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $l \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, il est clair que, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R\big)$, on a $|P|(r) < |bl|(r)$ et par conséquent, $|P - bl|(r) = |bl|(r)$, ce qui entraine que $|f - b|(r) = \dfrac{|bl|(r)}{|l|(r)} = |b|$. Ainsi, quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on déduit que b est une valeur spéciale de f. □

Corollaire 1.7.8.1. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Alors f n'admet aucune valeur spéciale et donc, f n'admet aucune valeur exceptionnelle. Si $f \in \mathcal{A} \in \mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, alors f n'admet aucune valeur quasi-exceptionnelle non plus.*

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$. Alors f admet au plus une valeur exceptionnelle. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$, alors f admet au plus une valeur quasi-exceptionnelle

Corollaire 1.7.8.2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$. S'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) \neq a, b$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$, alors f est une constante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))\big)$.*

Théorème 1.7.9. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ ayant un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$. Alors, pour tout $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, la fonction $f - b$ admet une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$.*

Démonstration. — Puisque f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$, 0 est une valeur spéciale de f. Soit $b \neq 0$. Alors, d'après le Théorème 1.7.7, b n'est pas une valeur spéciale et donc, d'après le Théorème 1.7.8, b n'est pas une valeur quasi-exceptionnelle. Par conséquent, f a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$. $\square$

1.7.3 Valeurs spéciales de la dérivée d'une fonction méromorphe

Lemme 1.7.2. *Soient $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ telles que $h'l - hl' = c$ où $c \in \mathbb{K}$. Alors,*

(i) Si h et l appartiennent à $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ et si l'une des fonctions h, l n'est pas affine, alors $c = 0$ et $\dfrac{h}{l}$ est une constante.

(ii) Si h et l appartiennent à $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ et $c \neq 0$, alors il existe $\phi \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ telle que $h'' = \phi h$ et $l'' = \phi l$.

(iii) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique résiduelle nulle et $h \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ est non affine et admet au moins deux zéros dans $d(\theta, R^-)$, alors $c = 0$ et $\dfrac{h}{l}$ est une constante.

Démonstration. — Supposons $c \neq 0$. Puisque $h'l - hl' = c$, on en déduit que tous les zéros de h et l sont des zéros simples et h et l n'ont pas de zéros communs. En plus, comme $h'l - hl' = c$, on a $h''l - hl'' = 0$ et donc

$$\frac{h''}{h} = \frac{l''}{l}. \tag{1.1}$$

Alors, tout zéro simple de h est aussi un zéro simple de h''. En effet, soit γ un zéro simple de h qui n'est pas un zéro de h'', donc γ est un pôle simple de $\dfrac{h''}{h}$ et, d'après (1.1), est un pôle simple de $\dfrac{l''}{l}$. Par conséquent, γ est un zéro de l, une contradiction. D'où on en déduit que $\phi = \dfrac{h''}{h}$ n'a pas de pôles et donc $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\phi \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$. D'une manière similaire, on montre que chaque zéro simple de l est aussi un zéro de l'' et donc, il existe $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\psi \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ telle que $\psi = \dfrac{l''}{l}$. Puisque $\dfrac{h''}{h} = \dfrac{l''}{l}$, on conclut que $\phi = \psi$. D'où on obtient (ii).

Prenons maintenant $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non affine. Du fait que $h'' = \phi h$, on a $|h''|(r) = |\phi|(r)|h|(r)$ $\forall r \in]0, +\infty[$. Mais, d'après le Théorème 1.7.2, $|h''|(r) \leq \dfrac{1}{r^2}|h|(r)$ $\forall r \in]0, +\infty[$. Puisque h n'est pas affine, h'' n'est pas identiquement nulle. Par conséquent $|\phi|(r) \leq \dfrac{1}{r^2}$ et donc, quand r tend vers $+\infty$, $|\phi|(r)$ tend vers 0 une contradiction. Ainsi

$c = 0$, ce qui entraîne $h'l - hl' = 0$ et $\dfrac{h}{l}$ constante. D'où on obtient (i).

Supposons maintenant que la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est nulle et $h \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ admet au moins deux zéros dans $d(\theta, R^-)$. Sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$. Comme $h \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$, elle peut être écrite sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on peut trouver un disque $d(0, s)$ où $s \in]0, R[$, tel que h a au moins $q \geq 2$ zéros dans $d(0, s)$. Soit $t \in]s, R[$ tel que h a exactement q zéros dans $d(0, t)$. Donc, d'après le Théorème 1.5.3, on a $|h|(r) = |a_q| r^q \quad \forall r \in]s, t[$. Par conséquent, on en déduit que $|h''|(r) = |q(q-1)||a_q| r^{q-2}$ $\forall r \in]s, t[$. Mais, puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique résiduelle nulle, on a $|q(q-1)| = 1$ et donc $|h''|(r) = |a_q| r^{q-2} \quad \forall r \in]s, t[$, c'est-à-dire $|h''|(r) = \dfrac{1}{r^2}|h|(r) \quad \forall r \in]s, t[$, ce qui entraîne $|\phi|(r) = \dfrac{1}{r} \ \forall r \in]s, t[$. Mais $\phi \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ est non constante, donc elle ne peut pas être une fonction décroissante de r. Ainsi $c = 0$ et $\dfrac{h}{l}$. D'où on obtient (iii). $\square$

Remarque. L'hypothèse "h ou l non affine" est indispensable dans le théorème précédent car, par exemple, si $h(x) = 3x - 2$ et $l(x) = x + 5$, on a $(h'l - hl')(x) = 3(x+5) - (3x-2) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{K}$ une contradiction au théorème précédent.

De même, l'hypothèse "h a au moins deux zéros" est aussi indispensable dans le théorème précédent. Voyons l' exemple suivant :

Soit $h(x) = \exp(x) + \exp(-x)$ et soit $l(x) = \exp(x) - \exp(-x)$. Le rayon de convergence de h et l est $p^{-\frac{1}{p-1}}$ si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est p et 1 si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est 0. Si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est 2, h a un zéro et si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est $p \neq 2$, h n'a pas de zéros. Donc h a au plus un zéro et $h'(x)l(x) - h(x)l'(x) = 4 \ \forall x \in d\big(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\big)$. On voit donc que $h'l - hl'$ peut être une constante non nulle.

Remarque. Ici, on retrouve aussi le résultat suivant qui est bien connu et qui ne nécessite pas des propriétés ultramétriques pour sa démonstration :

"Soit F un corps algèbriquement clos de caractéristique nulle et soient $P, Q \in F[x]$ où $\deg(P) \geq 2$. *Si $P'Q - PQ' = c$, alors $c = 0$".*

Démonstration. — En effet, supposons $c \neq 0$. Il est clair que P et Q n'ont pas de zéros communs et tous les zéros de P et Q sont simples. Donc $\dfrac{P''}{P}$ n'a pas de pôles et P'' est un multiple de P. Ainsi $\deg(P'') \geq \deg(P)$ une contradiction. Alors $c = 0$.

Théorème 1.7.10. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ qui n'est pas une homographie. Si f n'admet aucun pôle multiple, alors la dérivée de f n'admet aucune valeur exceptionnelle.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soient $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs, telles que $f = \dfrac{h}{l}$. Alors $f' = \dfrac{h'l - hl'}{l^2}$. Par conséquent, si l a seulement des zéros simples, les fonctions $h'l - hl'$ et l n'ont pas de zéros communs. Donc, les zéros de f' sont exactement les zéros de $h'l - hl'$.

Supposons que f' n'a pas de zéros. Donc $h'l - hl'$ non plus. Alors, il existe une constante $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ telle que $h'l - hl' = c$, une contradiction au Lemme 1.7.2. Par conséquent f' a au moins un zéro.

Supposons maintenant qu'il existe $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ qui soit une valeur exceptionnelle de f'. Mais $f - bx$ et f ont les mêmes pôles donc, d'après le paragraphe ci-dessus, $(f - bx)' = f' - b$ a au moins un zéro, une contradiction. Ainsi f' n'a pas de valeurs exceptionnelles, ce qui achève la démonstration. □

Remarque. L'hypothèse "f n'a que des pôles simples" ne peut pas être omise puisque, par exemple, si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ on a donc $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, ce qui entraîne que 0 est une valeur exceptionnelle.

Théorème 1.7.11. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. S'il existe une valeur $b \in \mathbb{K}$ tel que $f - b$ n'a qu'un nombre fini de zéros, alors pour chaque valeur $c \in \mathbb{K}$ non nulle, la fonction $f' - c$ a une infinité de zéros.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$.

Supposons que $f - b$ et $f' - c$ n'ont qu'un nombre fini de zéros, avec $c \neq 0$. Alors ces fonctions peuvent être écrites sous la forme $\dfrac{P}{h}$ et $\dfrac{Q}{l}$ respectivement où $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ et $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$. Alors $f' - c = \dfrac{P'h - Ph' - ch^2}{h^2}$ et on a donc

$$(P'h - Ph' - ch^2)\ l = Q\ h^2. \tag{1.2}$$

Puisque $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$, on en déduit que h aussi est transcendante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. non bornée dans $d(0, R^-)\big)$ et donc, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R\big)$, on a $\max\big\{|P'h|(r), |Ph'|(r)\big\} < |h^2|(r)$ ce qui entraîne $|P'h - Ph' - ch^2|(r) = |c||h^2|(r)$. Par conséquent, d'après (1.2), on en déduit que $|c||l|(r)|h^2|(r) = |Q|(r)|h^2|(r)$, c'est-à-dire que $|c||l|(r) = |Q|(r)$.

D'autre part, d'après le Théorème 1.7.2, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R\big)$, on a $|P'h - Ph'|(r) \leq \dfrac{|P|(r)|h|(r)}{r}$. Mais, d'après (1.2), on a $P'h - hP' = (Q+cl)h^2$ et on a donc $|Q+cl|(r)|h|(r) \leq \dfrac{|P|(r)}{r}$. Alors, du fait que $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $h \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, on en déduit que $|Q + cl|(r)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$. Par conséquent $Q + cl = 0$ et donc $f' = 0$ ce qui entraîne que f est une constante, une contradiction à l'hypothèse. Ainsi $f' - c$ a une infinité de zéros. $\square$

Remarque. D'après le théorème précédent on peut déduire que si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ ou bien si $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$, alors l'unique valeur quasi-exceptionnelle que f' peut admettre éventuellement est 0.

Le théorème précédent est seulement intéressant pour des fonctions méromorphes puisque si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, d'après le Corollaire 1.7.4.1, la conclusion est immédiate, c'est-à-dire que f et f' prennent tous les valeurs finies une infinité de fois.

1.7.4 Application du Lemme 1.7.2 à des équations fonctionnelles de la forme $y^{(n)} - \psi y = 0$

Les théorèmes suivants sont une application du Lemme 1.7.2, c'est-à dire, sont une application du problème du wronskien associé à deux fonctions analytiques.

Théorème 1.7.12. *Soit $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\psi \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $y^{(n)} - \psi y = 0$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. de $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ des solutions de $\mathcal{E}$. Si $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est non constante $\big($resp. $\psi \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, alors $E = \{0\}$. De plus, si $\psi \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ et $\|\psi\|_{d(\theta,R^-)} > \dfrac{1}{R^n}$, alors $E = \{0\}$.*

Démonstration. — Soit $h \in E \subset \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Supposons d'abord que h est non nulle et que $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est non constante. Comme h est solution de $\mathcal{E}$, on a $|h^{(n)}|(r) = |\psi|(r)|h|(r)$ $\forall r \in]0, +\infty[$. Mais, d'après le Théorème 1.7.2, on a $|\psi|(r) \leq \dfrac{1}{r^n}$ une contradiction. Donc $E = \{0\}$.

Maintenant, sans perte de généralité, on assume $\theta = 0$. Soit $h \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$. Supposons que h est non nulle et $\psi \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$. D'après le Théorème 1.7.2, on a $|\psi|(r) \leq \dfrac{1}{r^n}$ $\forall r \in]0, R[$. Donc $\|\psi\|_{d(0,R^-)} \leq \dfrac{1}{R^n}$, c'est-à-dire que $\psi \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$, une contradiction.

Alors $E = \{0\}$. De même, si $\psi \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$ et $\|\psi\|_{d(\theta,R^-)} > \dfrac{1}{R^n}$, ce qui contredit le fait que $\dfrac{|h^{(n)}|(r)}{|h|(r)} \leq \dfrac{1}{r^n}$ $\forall r \in]0, R[$. $\square$

Théorème 1.7.13. *Soit* $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $\psi \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ *et soit* $\mathcal{E}$ *l'équation différentialle* $y'' - \psi y = 0$. *Soit* E *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp. de* $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ *des solutions de* $\mathcal{E}$. *Alors la dimension de* E *est ou bien* 0 *ou bien* 1.

Démonstration. — Soient $h, l \in E$ non nulles. Donc $h''l - hl'' = 0$ ce qui entraîne $h'l - hl' = c$ où $c \in \mathbb{K}$. De plus, comme h et l sont non nulles, on en déduit que h'' et l'' sont non nulles également et donc, h et l sont non affines.

Supposons d'abord $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Si $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, d'après le Théorème 1.7.12, on a $E = \{0\}$ et donc, la dimension de E est 0. Supposons maintenant $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Si $c \neq 0$, d'après le Lemme 1.7.2, on a $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, une contradiction. Donc $c = 0$ et $h'l - hl' = 0$. Par conséquent $\dfrac{h}{l}$ est une constante et donc la dimension de E est au plus 1.

Maintenant supposons $\psi \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$. Si $c \neq 0$, d'après le Lemme 1.7.2, on en déduit que $\psi \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$ ce qui entraîne $\psi \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$. Par conséquent, d'après le Théorème 1.7.12, on a $E = \{0\}$ et donc, la dimension de E est 0. Si $c = 0$, on a $h'l - hl' = 0$ et donc $\dfrac{h}{l}$ est une constante, ce qui entraîne que la dimension de E est au plus 1. $\square$

Chapitre 2

Théorie de Nevanlinna sur un corps ultramétrique

2.1 Propriétés classiques de la théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes

Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distribution de valeurs (complexe aussi bien que p-adique) la Théorie de Nevanlinna joue un role majeur.

La théorie de Nevanlinna p-adique a été introduite en 1989 par A. Boutabaa [10] dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ et ensuite, en 2001, lui et A. Escassut ont étendu cette théorie aux fonctions dans $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ en tenant compte du problème de Lazard.

Comme on l'a déjà expliqué dans le chapitre précédent, au contraire des fonctions rationnelles, les fonctions méromorphes transcendantes dans $\mathbb{K}$ ou les fonctions méromorphes non-bornées dans $d(\theta, R^-)$ ont, en général, une infinité de zéros ou une infinité de pôles. Néanmoins, elles n'ont qu'un nombre fini de ceux-ci dans un disque fermé de rayon r où $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]\theta, R^-[\big)$. Afin d'étudier la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans ce disque-là, la théorie de Nevanlinna associe à chaque fonction méromorphe trois fonctions de r.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, et soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. On note $Z(r, f)$ la *fonction de comptage des zéros de* f dans $d(0, r)$, c'est-à-dire si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite finie ou infinie des zéros de f dans $d(0, R^-)$ avec un ordre de multiplicité respectif s_n, on pose

$$Z(r, f) := \sum_{|a_n| \le r} s_n \big(\log r - \log |a_n| \big).$$

De même, on note $\overline{Z}(r,f)$ la fonction de comptage des zéros de f sans prendre en compte les multiplicités. On pose

$$\overline{Z}(r,f) := \sum_{|a_n|\le r} \big(\log r - \log|a_n|\big).$$

D'une façon analogue, on définit la *fonction de comptage des pôles de* f dans $d(0,r)$ et pour cela on considère la suite finie ou infinie $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des pôles de f dans $d(0,R^-)$ avec un ordre de multiplicité respectif t_n. On pose, comme on l'a fait ci-dessus,

$$N(r,f) := \sum_{|b_n|\le r} t_n\big(\log r - \log|b_n|\big) \qquad \text{et} \qquad \overline{N}(r,f) := \sum_{|b_n|\le r} \big(\log r - \log|b_n|\big).$$

Finalement, on définit la *fonction de Nevanlinna* (appelé aussi la *fonction caractéristique*) de f, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r,f) := \max\big\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\big\}.$$

Remarquons que les fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ ne changent pas, à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$.

Tout au long de cette thèse, on supposera que la fonction $\wp$ intervenant dans les fonctions $Z(r,\wp)$, $N(r,\wp)$ et $T(r,\wp)$ n'a pas de zéro en 0, si $\wp \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\wp \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$, et n'a ni zéro ni pôles en 0, si $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\wp \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$.

Avant de donner quelques propriétés liées à la théorie de Nevanlinna on introduira les notations suivantes.

Notations. Soient ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]\theta,+\infty[$ $\big($resp. $I =]\theta,R[\big)$ et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \le \psi(r) + c\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \le \psi(r) + O\big(\varphi(r)\big)$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O\big(\varphi(r)\big)$.

Exemple :

(*i*) Soit $P(x) = \sum_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. Alors $Z(r,P) = \deg(P)\log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0,+\infty[$.

En effet, soit $\{\gamma_1, ..., \gamma_t\}$ l'ensemble des zéros de P où $t \leq q$, et soient $s_1, ..., s_t$ les ordres de multiplicité respectifs. Supposons $A = \sup_{1 \leq j \leq t} |\gamma_j|$. Si $r \in]A, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} Z(r, P) &= \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{|\gamma_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{t} s_j \log r - \log A + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma_j|}. \end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\sum_{j=1}^{t} s_j = q$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma_j|} - \log A = O(1)$. Par conséquent

$$Z(r, P) = \deg(P) \log r + O(1).$$

(*ii*) Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{s} b_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ deux polynômes premiers entre eux. Soit $\mathcal{G} = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$. Alors $T(r, \mathcal{G}) = \deg(\mathcal{G}) \log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0, +\infty[$.

En effet, soit $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ et soit $\{\beta_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des zéros de P et Q respectivement. Supposons $B = \sup_{i,j} \big\{|\gamma_i|, |\beta_j|\big\}$. D'après l'exemple précédent, pour $r \in]B, +\infty[$, on a $Z(r, P) = \deg(P) \log r + O(1)$ et $Z(r, Q) = \deg(Q) \log r + O(1)$. Par conséquent

$$T(r, \mathcal{G}) = \max\big\{Z(r, P) + \log |P(0)|, Z(r, Q)\big\} = \max\big\{\deg(P), \deg(Q)\big\} \log r + O(1)$$

où, par définition, $\max\big\{\deg(P), \deg(Q)\big\} = \deg(\mathcal{G})$.

Le théorème suivant est une conséquence de l'exemple précédent.

Théorème 2.1.1. (Corollaire 2.7 [38]) *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors $f \notin \mathbb{K}(x)$ si et seulement si* $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty.$

Démonstration. — Supposons d'abord que $f \in \mathbb{K}(x)$. Donc, d'après l'exemple précédent, $T(r, f) = \deg(f) \log r + O(1)$ pour r assez grand. Par conséquent $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \deg(f)$.

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$. Alors, f admet ou bien une infinité de zéros ou bien une infinité de pôles et on a donc, $T(r, f) > \lambda \log r \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall r \in]0, +\infty[$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty.$ □

Pour le cas $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-)$, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. $\big($Théorème 1.1 [15]$\big)$ *Soit $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$ n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Alors $f \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$ si et seulement si $T(r, f)$ est bornée dans* $]0, R[$.

Le théorème suivant sera très utilisé au long de tous les prochaines chapitres.

Théorème 2.1.3. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$ n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Si* $\displaystyle\limsup_{r\to+\infty} \frac{Z(r,g)}{T(r,f)} > 0$ $\left(\textit{resp. } \displaystyle\limsup_{r\to R^-} \frac{Z(r,g)}{T(r,f)} > 0\right)$ *alors g a une infinité de zéros.*

Démonstration. — Supposons que g a seulement un nombre fini de zéros. Si $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))\big)$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ et une fonction $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $h \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))\big)$ tels que $g(x) = \dfrac{P(x)}{h(x)}$ et que P et h n'aient pas de zéros communs.

Puisque $\displaystyle\limsup_{r\to+\infty} \frac{Z(r,g)}{T(r,f)} > 0$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\limsup_{r\to R^-} \frac{Z(r,g)}{T(r,f)} > 0\right)$, il existe $A > 0$ et une suite d'intervalles $\big\{]r_n, r'_n[\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\left(\text{resp. avec } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = R\right)$ tels que $Z(r, g) \geq T(r, f) + A$ $\forall r \in]r_n, r'_n[$. Mais $Z(r, g) = Z(r, P) = \deg(P) \log r + O(1)$. Donc

$$T(r, f) \leq \deg(P) \log r - A + O(1) \ \forall r \in]r_n, r'_n[. \tag{2.1}$$

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$. D'après le Corollaire 2.1.1, on a $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = +\infty$ ce qui contredit (2.1). Maintenant, si $f \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$ d'après le Théorème 2.1.2, $T(r, f)$ est non bornée dans $]0, R[$ ce qui contredit de nouveau (2.1). $\square$

Le Théorème 2.1.4 est immédiat d'après le Théorème 1.7.6.

Théorème 2.1.4. *Soit $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, et soit $\widehat{f}$ la fonction méromorphe définie par f dans $\widehat{d}(0, R^-) \subset \widehat{\mathbb{K}}$. Alors, les fonctions f et $\widehat{f}$ ont la même fonction de Nevanlinna, c'est-à-dire que $T(r, f) = T(r, \widehat{f})$.*

Maintenant, la formule qu'on donne dans le Théorème 2.1.5 ci-dessous est la version ultramétrique de la *Formule de Jensen* bien connue et qu'on utilisera assez fréquemment au long de tout notre travail.

Théorème 2.1.5. $\big($Lemme 2.1 [15]$\big)$ *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors,*

$$\log\big(|f|(r)\big) = Z(r, f) - N(r, f) + \log\big(|f(0)|\big) \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Démonstration. — D'après le Théorème 1.5.9, on déduit que

$$v(f, -\log r) = v\big(f(0)\big) - Z(r, f) + N(r, f) \quad \forall r \in]0, +\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Mais, comme on a déjà vu dans le chapitre précédent, $v(f, -\log r) = -\log\big(|f|(r)\big)$ et $v\big(f(0)\big) = -\log\big(|f(0)|\big)$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 2.1.5.1. *Soient* $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ *non nulles en* 0. *Supposons qu'il existe* $\rho \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\rho \in]0, R[\big)$ *tel que* $|f|(r) = |g|(r)$ $\forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]\rho, R[\big)$, *alors il existe* $\eta \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $Z(r, f) = Z(r, g) + \eta$ $\forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]\rho, R[\big)$.

Démonstration. — Le corollaire est immédiat d'après le Théorème 2.1.5 puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$ et $\eta = \log\left|\dfrac{g(0)}{f(0)}\right|$. □

Corollaire 2.1.5.2. $\big($Lemme 2.12 [15]$\big)$ *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *telles que* f *et* f' *n'aient ni zéro ni pôle en* 0. *Alors* $Z\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) \leq N\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) - \log r + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0, R[\big)$.

Démonstration. — D'après le Théorème 1.7.2, on sait que $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$ ce qui entraîne, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, que $\log\Big(\Big|\dfrac{f'}{f}\Big|(r)\Big) \leq -\log r$. Par conséquent, en appliquant à $\dfrac{f'}{f}$ le théorème précédent, on obtient l'inégalité désirée. □

Comme on avait déjà dit précèdement, la théorie de Nevanlinna s'exprime par deux théorèmes fondamentaux. Pour montrer le premier on aura besoin de la définition suivante.

Définition. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ non identiquement nulle. On note

$$m(r, f) := \max\big\{\log\big(|f|(r)\big), 0\big\}.$$

La fonction $m(r, \cdot)$ est appelée *fonction compensation.*

En considérant la définition ci-dessus, on obtient facilement le théorème suivant :

Théorème 2.1.6. (Théorème I.1 [10]) *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$). Alors, quand les quantités intervenant ci-dessous sont bien définies, on a :*

(*i*) $m(r, f+g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + O(1)\ \ \forall r \in]0, +\infty[$ (resp. $\forall r \in]0, R[$).

(*ii*) $m(r, f-a) = m(r, f) + O(1)\ \ \forall a \in \mathbb{K},\ \forall r \in]0, +\infty[$ (resp. $\forall r \in]0, R[$).

(*iii*) $m(r, f \cdot g) \leq m(r, f) + m(r, g) + O(1)\ \ \forall r \in]0, +\infty[$ (resp. $\forall r \in]0, R[$).

(*iv*) $m(r, a \cdot f) = m(r, f) + O(1)\ \ \forall r \in]0, +\infty[$ (resp. $\forall r \in]0, R[$).

(*v*) $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0\ \ \forall r \in [1, +\infty[$ (resp. $\forall r \in [1, R[$).

Démonstration. — Puisque $|\cdot|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. pour $\mathcal{M}(d(0, R^-))$), elle satisfait l'inégalité triangulaire ultramétrique, c'est-à-dire que $|f+g|(r) \leq \max\{|f|(r), |g|(r)\}$, et aussi $|f \cdot g|(r) = |f|(r) \cdot |g|(r)$. Par conséquent, grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on déduit sans difficulté (*i*), (*iii*) et (*iv*).

Si $|f|(r) > |a|$, pour r assez grand (resp. assez proche de R^-), on a $|f-a|(r) = |f|(r)$, d'où $m(r, f-a) = m(r, f)$. Alors que, si $|f|(r) \leq |a|$, on a $|f-a|(r) \leq |a|$, ce qui entraine $|m(r, f-a) - m(r, f)| \leq \log |a|$ et ainsi $m(r, f-a) = m(r, f) + O(1)$ et alors on a (*ii*).

D'après le Théorème 1.7.2, on a $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$. Par conséquent, pour $r \geq 1$, on a $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$ ce qui entraîne (*v*). □

On appelle le *Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna* le Théorème 2.1.7 et il est un analogue du Théorème 1.2 [34] sur $\mathbb{C}$, mais sa démonstration est beaucoup plus simple.

Théorème 2.1.7. (Théorème I.1 [10]) (Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna) *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors,*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)\ \ \forall r \in]0, +\infty[\ \text{(resp. } \forall r \in]0, R[).$$

Démonstration. — D'après le Théorème 2.1.5, on a

$$Z(r, f) + \log\big(|f(0)|\big) = \log\big(|f|(r)\big) + N(r, f)\ \forall r \in]0, +\infty[\ \text{(resp. } \forall r \in]0, R[).$$

Par conséquent, $\max\{Z(r, f) + \log\big(|f(0)|\big), N(r, f)\} = \max\{\log\big(|f|(r)\big), 0\} + N(r, f)$. Mais, comme $T(r, f) = \max\{Z(r, f) + \log\big(|f(0)|\big), N(r, f)\}$ et $m(r, f) = \max\{\log\big(|f|(r)\big), 0\}$ la démonstration est achevée. □

Comme une conséquence immédiate du théorème précédent, on a les corollaires suivants.

Corollaire 2.1.7.1. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$ *non nulle en* 0. *Alors,* $T(r,f) = Z(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$. *De plus, il existe* $\rho \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\rho \in]0,R[\big)$ *tel que, pour* $b \neq f(0)$, *on a* $Z(r,f) = Z(r,f-b)$ $\forall r \in]\rho,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]\rho,R[\big)$.

Corollaire 2.1.7.2. $\big($Théorèmes I.2 - I.3 [10]$\big)$ *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ *non nulle et telle que* f *n'a ni zéro ni pôle en* 0. *Alors* $T\Big(r,\dfrac{1}{f}\Big) = T(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R^-[\big)$. *Soit* $a \in \mathbb{K}$ *non nulle et différente de* $f(0)$. *Alors* $T(r,af) = T(r,f) + O(1)$ *and* $T(r,f-a) = T(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R^-[\big)$.

Démonstration. — En sachant que les pôles de f, af et $f-a$ sont les mêmes, la première et la deuxième égalité sont évidentes d'après le Théorème 2.1.6 (ii)-(iv) et le Théorème 2.1.7.

Soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. D'après la définition de $m(r,\cdot)$, on déduit que

$$m(r,f) - m\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = \max\big\{\log\big(|f|(r)\big),0\big\} + \min\big\{\log\big(|f|(r)\big),0\big\},$$

c'est-à-dire que $m(r,f) - m\Big(r,\dfrac{1}{f}\Big) = \log\big(|f|(r)\big)$. Donc, d'après les Théorèmes 2.1.5 et 2.1.7, on déduit que $T(r,f) = T\Big(r,\dfrac{1}{f}\Big) + \log\big(|f(0)|\big)$. $\square$

Les propriétés opératoires sont assez semblables à celles connues dans $\mathbb{C}$. Toutefois la propriété (iv) ci-dessous est spécifique à l'analyse ultramétrique.

Théorème 2.1.8. $\big($Théorème I.1 [10]$\big)$ *Soient* $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp* $f,g \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ *non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôles en* 0. *Alors,*

(i) $T(r,f+g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)$

(ii) $T(r,f\cdot g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)$.

Si h *est une fonction homographique, alors*

(iii) $T(r,h\circ f) = T(r,f) + O(1)$.

De plus, si $f,g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f,g \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$, *alors*

(iv) $T(r,f+g) \leq \max\big\{T(r,f),T(r,g)\big\} + O(1)$.

Démonstration. — (i) D'après le Théorème 2.1.6(i), on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f+g) + N(r, f+g) &\le \max\big\{m(r,f), m(r,g)\big\} + N(r,f) + N(r,g) \\ &\le m(r,f) + N(r,f) + m(r,g) + N(r,g), \end{aligned}$$

d'où $T(r, f+g) \le T(r,f) + T(r,g) + O(1)$.

(ii) De même, d'après le Théorème 2.1.6(iii), on déduit que

$$m(r, f\cdot g) + N(r, f\cdot g) \le \big(m(r,f) + m(r,g)\big) + N(r,f) + N(r,g),$$

d'où $T(r, f\cdot g) \le T(r,f) + T(r,g) + O(1)$.

(iii) Si h est affine, (iii) est évident. Supposons maintenant que h n'est pas une fonction affine, alors on peut écrire $h\circ f$ sous la forme $a + \dfrac{b}{f}$. Donc, d'après le corollaire 2.1.7.2, $T(r, h\circ f) = T\Big(r, \dfrac{b}{f}\Big) = T(r,f) + O(1)$.

(iv) Puisque $N(r,f) = N(r,g) = 0$, l'inégalité est immédiatement déduite du Théorème 2.1.6 (i). □

Lemme 2.1.1. (Lemme 2.4 [15]) *Soit $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $h, l \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifiant $Z(r,h) \le Z(r,f) + \varepsilon$ et $Z(r,l) \le N(r,f) + \varepsilon$ $\forall r \in]0, R[$.*

Corollaire 2.1.8.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifiant*

$$\max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\} \le T(r,f) + O(1).$$

Démonstration. — Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ et $Z(r,h) = Z(r,f) + O(1)$ et $Z(r,l) = N(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$. Par conséquent $\max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} \le \max\big\{Z(r,f) + N(r,f)\big\} + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$.

Maintenant, si $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))$, d'après le Lemme 2.1.1, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $h, l \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ et $Z(r,h) \le Z(r,f) + \varepsilon$ et $Z(r,l) \le N(r,f) + \varepsilon$ $\forall r \in]0, R[$. Donc, $\max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} \le \max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} + \varepsilon$ $\forall r \in]0, R[$.

En sachant que $\max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} \le T(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0, R[\big)$ et en sachant que, d'après le Corollaire 2.1.7.1, $Z(r,h) = T(r,h) + O(1)$ et $Z(r,l) = T(r,l) + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0, R[\big)$, on achève la démonstration. □

2.2 Propriétés classiques de la Théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes et leurs dérivées

Ici, on montrera quelques applications de la théorie de Nevanlinna, lesquelles établissent des liens entre des fonctions méromorphes et leurs dérivées. Nous allons d'abord montrer une version ultramétrique d'une inégalité classique bien connue dans la théorie de distribution des valeurs, *l'inégalité de Milloux.*

Théorème 2.2.1. $\big($Lemme 2.6 [15]$\big)$ *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ *telle que* $f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ *n'a ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

$$N\big(r, f^{(k)}\big) = N(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \quad \forall r \in]0,+\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R^-[\big)$$

et

$$Z\big(r, f^{(k)}\big) \leq Z(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \quad \forall r \in]0,+\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R^-[\big).$$

Démonstration. — Pour obtenir la première inégalité il suffit voir que chaque pôle γ de f d'ordre s est un pôle de $f^{(k)}$ d'ordre $s+k$.

Montrons maintenant la deuxième inégalité. Soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. D'après le Théorème 2.1.5, on sait que $Z(r,f') - N(r,f') + \log\big(|f'(0)|\big) = \log\big(|f'|(r)\big)$ et $Z(r,f) - N(r,f) + \log\big(|f(0)|\big) = \log\big(|f|(r)\big)$. Mais, d'après le Théorème 1.7.2, on a $|f'|(r) \leq \dfrac{|f|(r)}{r}$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, $\log\big(|f'|(r)\big) \leq \log\big(|f|(r)\big) - \log r$. Par conséquent,

$$Z(r,f') \leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) - \log r + O(1).$$

Mais, d'après la première inégalité, $N(r,f') - N(r,f) = \overline{N}(r,f)$. Donc,

$$Z(r,f') \leq Z(r,f) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq t$. Alors $Z\big(r, f^{(t+1)}\big) \leq Z\big(r, f^{(t)}\big) + \overline{N}\big(r, f^{(t)}\big) - \log r + O(1)$ et donc,

$$Z\big(r, f^{(t+1)}\big) \leq Z(r,f) + \underbrace{\overline{N}(r,f) + \ldots + \overline{N}(r,f)}_{(t-1)-fois} + \overline{N}\big(r, f^{(t)}\big) - \log r + O(1),$$

ce qui achève la démonstration puisque $\overline{N}\big(r, f^{(t)}\big) = \overline{N}(r,f)$. $\square$

Remarque. L'inégalité du théorème précédent n'est pas valable si on considère des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. Voici un contre-exemple :
Soit $f(x) = e^{\sin(x)}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$. Donc $Z(r,f) = 0 \ \ \forall r \in]0,+\infty[$. Puisque $f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$, on a

$$\lim_{r\to+\infty} Z(r,f') = Z\big(r,\cos(x)\big) = +\infty.$$

Par conséquent $\lim\limits_{r\to+\infty} Z(r,f') - Z(r,f) = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité du Théorème 2.2.1.

Corollaire 2.2.1.1. $\big($Lemme 2.7 [15]$\big)$ *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ telle que $f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors $T\big(r,f^{(k)}\big) \le (k+1)T(r,f) + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R^-[\big)$.*

En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$ est telle que $f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ n'a pas de zéro en 0. Alors $T\big(r,f^{(k)}\big) \le kT(r,f) + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R^-[\big)$.

Démonstration. — Le corollaire est immédiat puisque dans le théorème précédent on a $\overline{N}(r,f) \le N(r,f)$ et $\max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} \le T(r,f) + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$. □

Corollaire 2.2.1.2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ et soit $\breve{f}$ une primitive de f telles que f et $\breve{f}$ n'ont pas de zéro ni pôle en 0. Alors*

$$T(r,\breve{f}) \le T(r,f) + Z(r,\breve{f}) - Z(r,f) + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big).$$

Démonstration. — D'après le Théorème 2.2.1, f et $\breve{f}$ satisfont $N(r,f) = N(r,\breve{f}) + \overline{N}(r,\breve{f})$ et $Z(r,f) \le Z(r,\breve{f}) + \overline{N}(r,\breve{f}) - \log r + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$. Par suite

$$\begin{aligned} N(r,\breve{f}) &\le N(r,\breve{f}) + \overline{N}(r,\breve{f}) + Z(r,\breve{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1) \\ &= N(r,f) + Z(r,\breve{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais $N(r,f) \le T(r,f) + O(1)$ et donc

$$N(r,\breve{f}) \le T(r,f) + Z(r,\breve{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big).$$

D'autre part, puisque $Z(r,f) \le T(r,f) + O(1)$, on a

$$Z(r,\breve{f}) \le T(r,f) + Z(r,\breve{f}) - Z(r,f) + O(1) \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big).$$

Par conséquent, en considérant que $T(r,\breve{f}) = \max\{Z(r,\breve{f}) + \log|\breve{f}(0)|, \ N(r,\breve{f})\}$, on obtient l'inégalité désirée. □

Le lemme suivant est facile à vérifier et on l'utilise assez fréquemment dans le Chapitre 4.

Lemme 2.2.1. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ *telle que* f *et* f' *n'ont ni zéro ni pôle en* 0. *Soient* $n, k \in \mathbb{N}$ *et soit* $a \in \mathbb{K}$ *non nulle et différente de* $f(0)$. *Alors*

$$Z(r, f^n(f-a)^k f') = nZ(r,f) + kZ(r, f-a) + Z(r,f') \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\text{resp.} \ \ \forall r \in]0,R[\big).$$

Démonstration. — Puisque les pôles de $f^n(f-a)^k f'$ sont exactement les pôles de f, sans compter les multiplicités, on en déduit qu'ils ne sont pas zéros de f ni de $f-a$ ni de f'. Par conséquent, si γ est un zéro de f ou bien de $f-a$ ou bien de f', alors γ sera aussi un zéro de $f^n(f-a)^k f'$ et donc, $\omega_\gamma\big(f^n(f-a)^k f'\big) = n\omega_\gamma(f) + k\omega_\gamma(f-a) + \omega_\gamma(f') > 0$ d'où on déduit que

$$Z(r, f^n(f-a)^k f') = nZ(r,f) + kZ(r,f-a) + Z(r,f')$$

quel que soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[$ $\big)$, ce qui achève la démonstration. □

Notation. Pour mieux exprimer les prochains énoncés, on introduit les notations suivantes. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ou $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))$, et soit $\mathcal{P}$ une propriété vérifiée dans une partie de $\mathbb{K}$. On note $Z(r, f : x \text{ satisfaisant } \mathcal{P})$ $\big($resp. $\overline{Z}(r, f : x \text{ satisfaisant } \mathcal{P})\big)$ la fonction de comptage des zéros de f quand la propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite, en prenant en compte $\big($resp. sans prendre en compte$\big)$ les multiplicités. De plus, on note $Z_1(r,f)$ $\big($resp. $N_1(r,f)\big)$ la fonction de comptage des zéros $\big($resp. des pôles$\big)$ simples de f dans le disque $d(0,r)$.

Le lemme ci-dessous est un lemme classique et facile à vérifier.

Lemme 2.2.2. $\big($Lemme 2.10 [15]$\big)$ *Soient* $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $a_i \neq a_j$ *pour tout* $i \neq j$, *et soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ *telle que* $f, f', f-a_i$ $(i = 1, ..., q)$ *n'ont pas de zéro en* 0. *Alors,*
$\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \Big(Z(r, f-a_i) - \overline{Z}(r, f-a_i)\Big) = Z(r,f') - Z\big(r, f' : f(x) \neq 0, a_i\big)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$.

Démonstration. — Pour montrer le lemme on utilise les propriétés suivantes. D'abord $Z(r,f) - \overline{Z}(r,f)$ compte tous les zéros de f en diminuant de une unité son ordre de multiplicité. Ensuite, si γ est un zéro d'ordre s de f, alors γ est un zéro d'ordre $s-1$ de f'. □

2.2.1 L'inégalité de Milloux ultramétrique

L'*inégalité de Milloux* est bien connue dans $\mathbb{C}$ $\big($voir Théorème 3.2 [35]$\big)$ pour établir des liens entre les zéros d'une fonction méromorphe et les zéros de ses dérivées. Nous allons montrer ici une inégalité analogue pour des fonctions entières $\big($resp. analytiques dans $d(\theta, R^-)\big)$ ultramétriques qui sera utile pour l'étude d'unicité des fonctions qui partagent une valeur en ignorant les multiplicités.

Théorème 2.2.2. $\big($Inégalité de Milloux ultramétrique$\big)$
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))\big)$ *telle que* $f(0)f'(0)f''(0) \neq 0$, *et soit* $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. *Alors, pour* $r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0, R^-[\big)$, *on a*

$$T(r, f) \leq 2\overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, f' - a) - Z\big(r, f'' : f'(x) \neq a, (f(x), f'(x)) \neq (0, 0)\big) - Z_1(r, f) - \log r + O(1).$$

Démonstration. — Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. pour $r \in]0, R[\big)$. D'après le Lemme 2.2.2, on déduit que

$$Z(r, f) - \overline{Z}(r, f) = Z(r, f') - Z\big(r, f' : f(x) \neq 0\big). \tag{2.2}$$

Donc, on a aussi $Z(r, f' - a) = \overline{Z}(r, f' - a) + Z(r, f'' - a) - Z\big(r, f'' - a : f'(x) \neq a\big)$. Mais f' est analytique donc, d'après le Corollaire 2.1.7.1, on déduit que

$$Z(r, f') = \overline{Z}(r, f' - a) + Z(r, f'') - Z\big(r, f'' : f'(x) \neq a\big) + O(1). \tag{2.3}$$

Ainsi, d'après (2.2) et (2.3), on obtient

$$Z(r, f) = \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, f' - a) + Z(r, f'') - Z\big(r, f'' : f'(x) \neq a\big) - Z\big(r, f' : f(x) \neq 0\big) + O(1). \tag{2.4}$$

Par ailleurs, remarquons que la différence entre $\overline{Z}(r, f)$ et $Z_1(r, f)$ correspond à la fonction de comptage des zéros multiples de f sans prendre en compte les multiplicités, c'est-à-dire que

$$\overline{Z}(r, f) - Z_1(r, f) = Z\big(r, f' : f(x) = 0\big) - Z\big(r, f'' : f'(x) = f(x) = 0\big). \tag{2.5}$$

Remarquons aussi que $Z(r, f') = Z\big(r, f' : f(x) = 0\big) + Z\big(r, f' : f(x) \neq 0\big)$ et, d'après le Théorème 2.2.1, on a $Z(r, f'') \leq Z(r, f') - \log r + O(1)$. Donc, on obtient

$$Z(r, f'') \leq Z\big(r, f' : f(x) = 0\big) + Z\big(r, f' : f(x) \neq 0\big) - \log r + O(1).$$

Alors, d'après (2.5), on a

$$Z(r, f'') \leq \overline{Z}(r, f) - Z_1(r, f) + Z\big(r, f'' : f'(x) = f(x) = 0\big) + Z\big(r, f' : f(x) \neq 0\big) - \\ - \log r + O(1). \tag{2.6}$$

Par conséquent, en considérant (2.6) dans (2.4), on obtient

$$Z(r,f) \leq 2\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,f'-a) - Z_1(r,f) + Z\big(r,f'' : f'(x) = f(x) = 0\big) - \\ - Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a\big) - \log r + O(1). \tag{2.7}$$

Mais,
$Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a\big) - Z\big(r,f'' : f'(x) = f(x) = 0\big)$
$= Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, f'(x) \neq 0\big) + Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, f(x) \neq 0\big)$
$\geq Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big).$
d'où

$$Z\big(r,f'' : f'(x) = f(x) = 0\big) - Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a\big) \leq -Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big).$$

Donc, d'après (2.7), on obtient

$$Z(r,f) \leq 2\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,f'-a) - Z_1(r,f) - Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) - \log r + O(1).$$

Mais $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$ et donc, d'après le Corollaire 2.1.7.1, on a $Z(r,f) = T(r,f) + O(1)$. Ainsi, on obtient l'inégalité désirée

$$T(r,f) \leq 2\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,f'-a) - Z_1(r,f) - Z\big(r,f'' : f'(x) \neq a, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) - \log r + O(1).$$

$\square$

2.2.2 Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna

Comme l'on avait déjà signalé, le *Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna* est l'un des théorèmes les plus utilisé dans la théorie de distribution de valeurs. La version ultramétrique a été d'abord introduite par A. Boutabaa [11], en considérant le corps tout entier $\mathbb{K}$, et ensuite lui même et A. Escassut [15] ont étendu ce théorème à $d(0,R^-)$. Les deux théorèmes suivants montrent ce théorème sous deux formes différentes. Pour avoir une idée de son procédé, on reproduira l'une des démonstrations qui découle des lemmes 2.1.1, 2.2.2 et du lemme suivant :

Lemme 2.2.3. $\big($Lemme 2.9 [15]$\big)$ *Soient $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$ tels que $a_i \neq a_j$ quand $i \neq j$. Soient $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ et, pour chaque $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, il existe $\lambda(r) \in \{1,...,q\}$ tels que $Z(r, h - a_i l) \geq \max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} + A$ $\forall i \neq \lambda(r)$ $(i = 1,...,q)$, $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$.*

Théorème 2.2.3. $\big($Théorème 1.4 [15]$\big)$ $\big($Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna (1)$\big)$
Soient $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$ $(q \geq 2)$. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0 *et telle que* f' *et* $f - a_i$ *ne sont pas nulles en* 0. *Alors*
$$(q-1)\ T(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + Z(r, f') - Z(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q) - \log r + O(1)$$
$\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0, R[\big)$. *De plus, si* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$, *alors*
$$q\ T(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + Z(r, f') - Z(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q) - \log r + O(1)$$
$\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0, R[\big)$.

Théorème 2.2.4. $\big($Théorème 1.4' [15]$\big)$ $\big($Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna (2)$\big)$

Soient $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$ *où* $q \geq 2$. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0 *et telle que* f' *et* $f - a_i$ *ne sont pas nulles en* 0. *Alors*
$$(q-1)\ T(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + \overline{N}(r, f) - Z(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q) - \log r + O(1)$$
$\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0, R[\big)$.

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$. Il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$. D'après le Lemme 2.2.3, il existe $A \in \mathbb{R}$ et, pour chaque $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, il existe $\lambda(r) \in \{1, ..., q\}$ tel que
$$Z(r, h - a_i) \geq \max\big\{Z(r, h), Z(r, l)\big\} + A \quad \forall i \neq \lambda(r).$$

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, on sait que $Z(r, h) = Z(r, f) + O(1)$ et $Z(r, l) = N(r, f) + O(1)$ $\forall r \in]0, +\infty[$. Maintenant, si $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$ d'après le Lemme 2.1.1, on a $Z(r, h) \leq Z(r, f) + 1$ et $Z(r, l) \leq N(r, f) + 1$ $\forall r \in]0, R^-[$. Par conséquent, il existe $B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$Z(r, h - a_i l) \geq T(r, f) + B \quad \forall i \neq \lambda(r), \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big). \tag{2.8}$$

D'autre part, rappelons qu'un diviseur défini dans $\mathbb{K}$ ou dans $d(\theta, R^-)$ est une fonction à support fini, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut donc définir la différence de deux diviseurs, qui est alors une fonction à support fini, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On a alors $\mathcal{D}(h) - \mathcal{D}(l) := \mathcal{D}\Big(\dfrac{h}{l}\Big) - \mathcal{D}\Big(\dfrac{l}{h}\Big)$. Par conséquence
$$\mathcal{D}(h - a_i l) = \mathcal{D}(f - a_i) + \mathcal{D}(l) - \mathcal{D}\Big(\frac{1}{f - a_i}\Big) = \mathcal{D}(f - a_i) + \mathcal{D}(l) - \mathcal{D}\Big(\frac{1}{f}\Big)$$

et donc, en considérant la fonction de comptage des zéros, on déduit que $Z(r, h - a_i l) = Z(r, f - a_i) + Z(r, l) - Z\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big)$. Mais $Z\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big) = N(r, f)$ et $Z(r, l) \le N(r, f) + 1$. Donc

$$Z(r, h - a_i l) \le Z(r, f - a_i) + 1 \quad \forall i \in \{1, ..., q\},\ \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big). \qquad (2.9)$$

Par conséquent, d'après (2.9) et (2.8), on obtient

$$(q-1)\ \Big[T(r, f) + B\Big] \le \sum_{i=1,\ i\neq\lambda(r)}^{q} Z(r, h - a_i l) \le \sum_{i=1,\ i\neq\lambda(r)}^{q} Z(r, f - a_i) + (q-1)$$

$\forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big)$ et donc, en prenant $C = (q-1)(1-B)$, on obtient

$$(q-1)\ T(r, f) \le \sum_{i=1}^{q} Z(r, f - a_i) + C - Z\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp.} r \in]0, R[\big).$$

Ainsi, d'après le Lemme 2.2.2, on a

$$(q-1)\ T(r, f) \le \sum_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + Z(r, f') - Z\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) - Z\big(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q\big) + C \qquad (2.10)$$

$\forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big)$.

Par ailleurs, puisque f et $f - a_i$ ont les mêmes dérivées, pour chaque $i \in \{1, ..., q\}$, il existe une constante $c_i \in \mathbb{R}$ telle que $Z(r, f') = Z\big(r, (f - a_i)'\big) = Z(r, f - a_i) + \overline{N}(r, f - a_i) + c_i - \log r \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big)$. En particulier, pour $i = \lambda(r)$, en posant $M = \max\limits_{1\le i\le q}\{c_i\}$, on obtient

$$Z(r, f') \le Z\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) + \overline{N}\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) + M - \log r.$$

Mais $\overline{N}\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) = \overline{N}(r, f)$ et donc,

$$Z(r, f') \le Z\big(r, f - a_{\lambda(r)}\big) + \overline{N}(r, f) + M - \log r \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big). \qquad (2.11)$$

Par conséquent, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, d'après (2.10) et (2.11), on obtient

$$(q-1)\ T(r, f) \le \sum_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + \overline{N}(r, f) - Z(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q) - \log r + (C + M)$$

$\forall r > 0$.

Si $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$, il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que pour r assez proche de R, on a $-\log r \le N$ et donc $(q-1)\ T(r, f) \le \sum\limits_{i=1}^{q} \overline{Z}(r, f - a_i) + \overline{N}(r, f) - Z(r, f' : f(x) \neq a_i\ \forall i = 1, ..., q) + O(1)$ $\forall r \in]0, R[$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque. Le terme $-\log r$ est très utile quand $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Par contre, il devient sans effet quand $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$. On utilisera cette propriété assez fréquemment surtout dans le Chapitre 4, ce qui permet d'améliorer les résultats obtenus dans $\mathbb{C}$ par rapport à l'unicité des fonctions.

2.3 Petites Fonctions

Définition et Notation. Soient $f, \alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, \alpha \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. La fonction α est appelée *petite fonction par rapport à f* si elle satisfait : $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,\alpha)}{T(r,f)} = 0$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-} \dfrac{T(r,\alpha)}{T(r,f)} = 0\Big)$.

On note $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ l'ensemble des fonctions méromorphes qui sont petites par rapport à f dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$ et de même, on note $\mathcal{A}_f(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_f(\mathbb{K}) \bigcap \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{A}_f(d(0, R^-)) = \mathcal{M}_f(d(0, R^-)) \bigcap \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$.

Si f ou α admettent 0 comme un zéro ou un pôle, par un changement de variable on peut se ramener à ce que l'origine ne soit ni un zéro, ni un pôle de f et de α et par suite, la propriété ne dépend pas de l'origine.

Si une fonction réelle ψ définie dans $]0, +\infty[$ $\big($resp. dans $]0, R[\big)$ satisfait que $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\psi(r)}{T(r,f)} = 0$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-} \dfrac{\psi(r)}{T(r,f)} = 0\Big)$, on écrit simplement $S_f(r)$ à la place de $\psi(r)$ ou bien on dit que *“ ψ est de la forme $S_f(r)$ ”*.

D'après le Théorème 2.1.8, on peut déduire facilement le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *$\mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ est une $\mathbb{K}-$sous-algèbre de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. de $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$ et $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ est son corps de fractions.*

Le théorème suivant est déjà bien connu en analyse complexe et en analyse ultramétrique $\big($voir Théorème 5.2 [38]$\big)$. Il généralise d'une certain façon le Théorème 2.1.8. Ici, on donnera une nouvelle démonstration.

Théorème 2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ et soit $P \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})[X]$ $\big($resp. $P \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))[X]\big)$ de degré n, tels que f et $P(f)$ n'ont ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a $T\big(r, P(f)\big) = nT(r, f) + S_f(r)$. De plus, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $T(r, P(f)) = nT(r, f) + O(1)$.*

Démonstration. — Supposons d'abord $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs et telles que $f = \frac{h}{l}$. Soit $P(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i$. Donc $P(f) = \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-i}}{Bl^n}$ où $A_i \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ (i=1,...,n). Alors, pour $r \in]0, +\infty[$, on a $Z\big(r, P(f)\big) \leq Z\Big(r, \sum_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-j}\Big)$ et, d'après le Théorème 2.1.8, on voit que

$$Z\Big(r, \sum_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-j}\Big) \leq \max_{0 \leq i \leq n} Z(r, A_i h^i l^{n-i}) \leq nT(r, f) + S_f(r).$$

Donc $Z\big(r, P(f)\big) \leq nT(r, f) + S_f(r)$.

D'autre part, pour $r \in]0, +\infty[$, on a $N\big(r, P(f)\big) \leq N(r, Bl^n)$ et, d'après le Théorème 2.1.8, $N(r, Bl^n) \leq nT(r, f) + S_f(r)$. Ainsi $N\big(r, P(f)\big) \leq nT(r, f) + S_f(r)$. Par conséquent,

$$T\big(r, P(f)\big) = \max\big\{Z\big(r, P(f)\big) + \log\big|(P \circ f)(0)\big|, N\big(r, P(f)\big)\big\} \leq nT(r, f) + S_f(r).$$

Maintenant, il nous reste à montrer que $nT(r, f) + S_f(r) \leq T\big(r, P(f)\big)$. Supposons le contraire. Donc, il existe $\rho > 0$ suffisamment petit, et il existe une suite d'intervalles $\big\{]r'_m, r''_m[\big\}_{m \in \mathbb{N}}$ où $\lim_{m \to +\infty} r'_m = +\infty$, tels que $T\big(r, P(f)\big) \leq \rho n T(r, f)$ $\forall r \in \bigcup_{m=1}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$. Alors, en particulier, $N\big(r, P(f)\big) \leq \rho n T(r, f)$ $\forall r \in \bigcup_{m=1}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$. Mais

$$N\big(r, P(f)\big) \geq N\big(r, Bl^n\big) - N\Big(r, \sum_{i=0}^{n} A_i\Big) = N\big(r, Bl^n\big) + S_f(r)$$

et donc, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $\lambda > \rho$ assez petit, tels que $\lambda n T(r, f) > N(r, Bl^n)$ $\forall r \in \bigcup_{m=q}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$, d'où on déduit que $T(r, f) = T(r, h) + O(1)$ $\forall r \in \bigcup_{m=q}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$ et donc

$$T\big(r, P(f)\big) = T\Big(r, \sum_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-i}\Big) \quad \forall r \in \bigcup_{m=q}^{+\infty}]r'_m, r''_m[. \tag{2.12}$$

Par ailleurs, on peut remarquer aussi qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda T(r, A_n h^n) > T(r, A_i h^i l^{n-i})$ $\forall j = 1, ..., n-1$ $\forall r \in \bigcup_{m=s}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$, ce qui implique que

$\Big|\sum\limits_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-j}\Big|(r) = |A_n h^n|(r) \quad \forall r \in \bigcup\limits_{m=s}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$ et ainsi, comme ce sont des fonctions entières, on a $T\Big(r, \sum\limits_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-j}\Big) = T(r, A_n h^n) + O(1) \quad \forall r \in \bigcup\limits_{m=s}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$. Par conséquent, il existe $\mu > \lambda$ assez petit, et $t \in \mathbb{N}$ $(t \geq s)$ tels que

$$T\Big(r, \sum_{i=0}^{n} A_i h^i l^{n-j}\Big) > \mu n T(r, f) \quad \forall r \in \bigcup_{m=t}^{+\infty}]r'_m, r''_m[,$$

ce qui entraîne d'après (2.12) que $T\big(r, P(f)\big) > \mu n T(r, f) \quad \forall r \in \bigcup\limits_{m=t}^{+\infty}]r'_m, r''_m[$, une contradiction à ce qu'on avait supposé et cela achève la démonstration pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Dans le cas $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$, on considère la fonction méromorphe $\widehat{f}$ définie par f dans $\widehat{d}(0, R^-) \subset \widehat{\mathbb{K}}$ et, d'après le Théorème 1.7.5 sans perte de généralité, on peut supposer $\widehat{\mathbb{K}}$ sphériquement complet. Alors $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ n'ont pas de zéros communs, et d'après le Théorème 2.1.4, les fonctions $T(r, \widehat{f})$ et $T(r, f)$ sont exactement les mêmes. Le reste de la démonstration est analogue au cas $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. $\square$

Grâce au théorème précédent, on peut montrer assez facilement les théorèmes qui suivent :

Théorème 2.3.2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$. Alors $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$ est un corps algébriquement fermé dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. dans $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$.*

Démonstration. — Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$. Supposons que g est algébrique sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. sur $\mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_q$ dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. dans $\mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $P(g) = \sum\limits_{n=0}^{q} \alpha_n(x) g^n$ le polynôme minimal de g sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. sur $\mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$. Donc $\alpha_q(x) = 1$.

Sans perte de généralité, on peut suppose que $\theta = 0$ et qu'aucune α_n $(n = 0, ..., q-1)$ n'admet ni zéro ni pôle en 0. Posons $Q(g) = -\sum\limits_{n=0}^{q-1} \alpha_n(x) g^n$. D'après le Théorème 2.3.1, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a $T(r, g^q) = q\, T(r, g) + O(1)$ et de plus, $T\big(r, Q(g)\big) \leq (q-1) T(r, g) + S_f(r)$. Par conséquent $T(r, g)$ est de la forme $S_f(r)$, c'est-à-dire que $g \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ ce qui achève la démonstration. $\square$

D'une façon analogue on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *Le corps* $\mathbb{K}(x)$ $\big($*resp.* $\mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))\big)$ *est algébriquement fermé dans* $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp. dans* $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$.

À partir des théorèmes précédents, le corollaire qui suit est immédiat.

Corollaire 2.3.3.1. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. *Alors* f *est transcendante sur* $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($*resp. sur* $\mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$. *En particulier,* f *est transcendante sur* $\mathbb{K}(x)$ $\big($*resp. sur* $\mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))\big)$.

Le Corollaire 2.3.3.1 justifie la définition suivante :

Définition. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. On dira que f est *transcendante* si $f \notin \mathbb{K}(x)$.

Le Lemme 2.3.2 est une application du Théorème 2.3.1 qu'on utilise plus fréquemment dans le Chapitre 4.

Lemme 2.3.2. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *et soit* $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ *telles que* f *et* α *n'ont ni zéro ni pôle en* 0. *Soient* $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *et* $n, k \in \mathbb{N}$. *Supposons* $F = \dfrac{f^n(f-a)^k f'}{\alpha}$. *Alors*

$$T(r, F) \geq (n+k)T(r, f) - S_f(r) \quad \forall r \in]0, +\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

De plus, si $\alpha \in \mathbb{K}(x)$, *on a*

$$T(r, F) \geq (n+k)T(r, f) - \deg(\alpha)\log r \quad \forall r \in]0, +\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Démonstration. — Il est clair que $Z(r, F) \geq Z(r, f^n(f-a)^k f') - Z(r, \alpha)$. Mais, d'après le Lemma 2.2.1, $Z(r, f^n(f-a)^k f') \geq Z(r, f^n(f-a)^k)$. Donc $Z(r, F) \geq Z(r, f^n(f-a)^k) - S_f(r)$. D'autre part, on voit que $N(r, F) \geq N(r, f^n(f-a)^k) - N(r, \alpha)$. Comme $N(r, \alpha)$ est de la forme $S_f(r)$, on en déduit que $N(r, F) \geq N(r, f^n(f-a)^k) - S_f(r)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} T(r, F) &= \max\{Z(r, F) + \log|F(0)|, N(r, F)\} \\ &\geq \max\{Z(r, f^n(f-a)^k) - S_f(r) + O(1), N(r, f^n(f-a)^k) - S_f(r) + O(1)\} \\ &= T(r, f^n(f-a)^k) - S_f(r). \end{aligned}$$

Mais, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f^n(f-a)^k) = (n+k)T(r, f) + O(1)$. Par conséquent, l'inégalité ci-dessus est réduite à $T(r, F) \geq (n+k)T(r, f) - S_f(r) + O(1)$, ce qui achève la première partie de la démonstration.

Supposons maintenant $\alpha = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$ où $P, Q \in \mathbb{K}[x]$. Alors $Z(r,\alpha) = \deg(P)\log r + O(1)$, $N(r,\alpha) = \deg(Q)\log r + O(1)$ et $T(r,\alpha) = \deg(\alpha)\log r + O(1) \geq \max\big\{Z(r,\alpha), N(r,\alpha)\big\}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 2.3.3.2. *Soient $f, \alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, \alpha \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ et soient $n, k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Supposons $F = f^n(f-a)^k f'$. Si $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0,R^-))\big)$ alors $\alpha \in \mathcal{M}_F(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_F(d(0,R^-))\big)$.*

Un théorème utile et classique, bien connu sur $\mathbb{C}$, est le *Théorème Fondamental de Nevanlinna sur trois petites fonctions* qui permet de remplacer trois valeurs $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ par trois petites fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dans l'application de ce Théorème. Ce théorème a été généralisé sur $\mathbb{C}$ à n petites fonctions par Katsutoshi Yamanoi [58].

Le Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions a été aussi établi pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ par P. C. Hu et C. C. Yang [39] en suivant la démonstration connue dans $\mathbb{C}$. Cette démonstration permet d'établir également le théorème pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans le disque $d(0,R^-)$. Jusqu'à présent dans le contexte ultramétrique, il n'existe aucun théorème analogue à celui de K. Yamanoi qui généraliserait le Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions à n petites fonctions.

Ici, on insistera sur une version particulière pour des fonctions analytiques et quelques corollaires qu'on utilisera par la suite.

Théorème 2.3.4. $\big($Théorème 2.21 [39]$\big)$ $\big($Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions$\big)$ *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ non-constante et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{M}_f(d(0,R^-))\big)$ distinctes et telles que, si α_i n'est pas identiquement nulle, elle vérifie $\alpha_i(0) \neq 0, \infty$ $(i = 1,2,3)$. Alors, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

$$T(r,f) \leq \sum_{i=1}^{3} \overline{Z}(r, f-\alpha_i) + S(r),$$

où $S(r) = 4T(r,\alpha_1) + 4T(r,\alpha_2) + 5T(r,\alpha_3) + O(1)$.

Corollaire 2.3.4.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ non-constante et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0,R^-))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

$$T(r,f) \leq \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,f-\alpha) + \overline{N}(r,f) + S(r),$$

où $S(r) = 4T(r,\alpha) + O(1)$.

Démonstration. — En prenant $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ et $\alpha_3 = 0$ dans le Théorème 2.3.4 et en appliquant cela à $\psi = \dfrac{1}{f-1}$, on obtient le corollaire. $\square$

Remarque. Dans le théorème et dans le corollaire précédent, comme $S(r)$ dépend seulement de $T(r, \alpha_i)$ et $\alpha_i \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha_i \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$, toutes les $T(r, \alpha_i)$ sont de la forme $S_f(r)$ et donc, sans perte de généralité, on peut remplacer $S(r)$ par $S_f(r)$.

D'après le Corollaire 2.3.4.1, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.3.4.2. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ n'admettant ni zéro ni pôle en 0. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Si $f + g = \alpha$ alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$T(r, f) \leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, g) + \overline{N}(r, f) + S_f(r).$$

Corollaire 2.3.4.3. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ non constante et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ telle que $\alpha(0) \neq 0, \infty$ et soit $n \geq 2$ un entier. Alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$(n-2)T(r, f) \leq \overline{Z}(r, f^n - \alpha) + S_f(r).$$

Démonstration. — Comme $f^n \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathcal{M}_{f^n}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f^n \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$, et $\alpha \in \mathcal{M}_{f^n}(d(0, R^-))\big)$, en appliquant le Corollaire 2.3.4.1 à f^n, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$T(r, f^n) \leq \overline{Z}(r, f^n) + \overline{Z}(r, f^n - \alpha) + \overline{N}(r, f^n) + S_f(r).$$

Mais $\overline{Z}(r, f^n) \leq Z(r, f)$, $\overline{N}(r, f^n) \leq N(r, f)$ et $\max\big\{Z(r, f), N(r, f)\big\} \leq T(r, f) + O(1)$. De plus, d'après le Théorème 2.3.1, $T(r, f^n) = nT(r, f) + O(1)$. Par conséquent, pour $n \geq 2$, on a

$$(n-2)T(r, f) \leq \overline{Z}(r, f^n - \alpha) + S_f(r)$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 2.3.4 mais cette fois en prenant des fonctions analytiques dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$.

Théorème 2.3.5. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ non constante et non nulle en 0. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-))\big)$ distinctes et telles que, si α_i n'est pas identiquement nulle, elle vérifie $\alpha_i(0) \neq 0, f(0)$ $(i = 1, 2)$. Alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$T(r, f) \leq \overline{Z}(r, f - \alpha_1) + \overline{Z}(r, f - \alpha_2) + S(r),$$

où $S(r) = 2T(r, \alpha_1) + 3T(r, \alpha_2) + O(1)$.

Démonstration. — Posons $\psi = \dfrac{f-\alpha_1}{f-\alpha_2}$ et supposons, sans perte de généralité, que 0 n'est ni zéro ni pôle de ψ. En considérant les propriétés basiques de la fonction de Nevanlinna qu'on a déjà montrées dans les théorèmes précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
T(r,f) &\leq T(r,f-\alpha_2)+T(r,\alpha_2)+O(1)\\
&\leq T\Big(r,\frac{\alpha_2-\alpha_1}{f-\alpha_2}\Big)+T\Big(r,\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\Big)+T(r,\alpha_2)+O(1)\\
&\leq T\Big(r,1+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{f-\alpha_2}\Big)+2T(r,\alpha_2)+T(r,\alpha_1)+O(1)\\
&= T(r,\psi)+2T(r,\alpha_2)+T(r,\alpha_1)+O(1),
\end{aligned}$$

pour tout $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$. Mais, d'après le Théorème 2.2.4, on a

$$\begin{aligned}
T(r,\psi) &\leq \overline{Z}(r,\psi)+\overline{Z}(r,\psi-1)+\overline{N}(r,\psi)+O(1)\\
&\leq \overline{Z}(r,f-\alpha_1)+\overline{Z}(r,\alpha_1-\alpha_2)+\overline{Z}(r,f-\alpha_2)+O(1)\\
&\leq \overline{Z}(r,f-\alpha_1)+T(r,\alpha_1-\alpha_2)+\overline{Z}(r,f-\alpha_2)+O(1)\\
&\leq \overline{Z}(r,f-\alpha_1)+\overline{Z}(r,f-\alpha_2)+T(r,\alpha_1)+T(r,\alpha_2)+O(1),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité désirée. □

Le Corollaire 2.3.5.1 est facile à vérifier, en prenant en compte que $S(r)$ dépend seulement de $T(r,\alpha_i)$ qui, d'après le Théorème 2.1.2, est bornée dans $]0,R[$.

Corollaire 2.3.5.1. *Soit $f\in\mathcal{A}_u(d(0,R^-))$ non nulle en 0. Soient $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{A}_b(d(0,R^-))$ distinctes et telles que, si α_i n'est pas identiquement nulle, elle vérifie $\alpha_i(0)\neq 0, f(0)$ $(i=1,2)$. Alors, pour $r\in]0,R[$, on a*

$$T(r,f)\leq \overline{Z}(r,f-\alpha_1)+\overline{Z}(r,f-\alpha_2)+O(1).$$

Chapitre 3

Distribution des zéros des fonctions méromorphes sur un corps ultramétrique ou sur un disque

3.1 Conjecture de Hayman sur un corps ultramétrique

3.1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la distribution des zéros des fonctions méromorphes dans le corps $\mathbb{K}$ et dans le disque $d(\theta, R^-) \subset \mathbb{K}$. On va d'abord étudier la fameuse conjecture de Hayman dans le contexte ultramétrique. Ensuite, dans le prolongement de cette étude, on étudie la distribution des zéros des fonctions méromorphes de la forme $P'(f)f'$ où P est un polynôme.

Conjecture :
Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$, $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$ qui ne sont pas zéros de f.

Remarque. Tout zéro multiple de f est évidemment un zéro de $f' + \mathcal{T} f^m$ sauf peut-être un nombre fini d'eux qui sont pôles de $\mathcal{T}$. C'est pourquoi on ne s'intéresse qu'aux zéros de $f' + \mathcal{T} f^m$ qui ne sont pas zéros de f.

D'autre part, posons $g = \dfrac{1}{f}$. Alors

$$f' + \mathcal{T} f^m = -\frac{1}{g^m}\big(g^{m-2}g' - \mathcal{T}\big). \tag{3.1}$$

Donc, il est facile de voir que les zéros de $f' + \mathcal{T} f^m$ qui ne sont pas zéros de f sont les zéros de $g^{m-2}g' - \mathcal{T}$ quand $m \geq 3$. Par conséquent, en prenant $n = m - 2$, la conjecture précédente implique que :

Si $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))\big)$, $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $g'g^n - \mathcal{T}$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$.

Cette question a été étudiée dans $\mathbb{C}$ durant plus de 35 ans en prenant pour $\mathcal{T}$ une constante complexe non nulle a. En 1967 $\big($[36], Problème 1.19$\big)$, W. K. Hayman conjecture que si
$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est non constante et $n \in \mathbb{N}$, alors $g'g^n$ prend chaque valeur finie non nulle. Antérieurement il avait montré cela pour $n \geq 3$. Plus précisément, en 1959, il avait montré que si g est une fonction méromorphe transcendante, $g'g^n$ prend chaque valeur finie non nulle une infinité de fois quand $n \geq 3$ $\big($[34], Théorème 9$\big)$. Il obtenait la même conclusion quand g est entière et $n \geq 2$ $\big($[34], Théorème 10$\big)$. En 1967, J. Clunie a obtenu cette conclusion dans [20] quand g est entière et $n = 1$. Douze ans plus tard, en 1979, E. Mues $\big($[50], Satz 3$\big)$ a résolu le cas g méromorphe et $n = 2$. Finalement, en 1995, W. Bergweiler et A. Eremenko dans [8] et séparément H. H. Chen et M. L. Fang dans [17] ont résolu le cas g méromorphe et $n = 1$. Ainsi, la conjecture de Hayman est résolue dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que *"la fonction $f' + af^m$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}$ qui ne sont pas zéros de f quand $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est transcendante et $m \geq 3$"*. De plus, dans $\mathbb{C}$, on trouve des contre-exemples montrant que $f' + f^m$ peut ne pas avoir de zéros quand $m = 1$ ou $m = 2$.

Contre-exemples bien connus de la conjecture dans $\mathbb{C}$:

$m = 1$ La fonction $f' + f$ n'a pas de zéros si $f(x) = e^x$.
$m = 2$ La fonction $f' + f^2$ n'a pas de zéros si $f(x) = \tan(-x)$.

3.1.2 Développement de la Conjecture de Hayman

Voici maintenant les résultats obtenus après avoir étudié la conjecture de Hayman sur le corps ultramétrique $\mathbb{K}$ et aussi sur le disque ouvert $d(\theta, R^-)$. Les démonstrations sont assez différentes de celles données dans le corps complexe $\mathbb{C}$.

La conjecture de Hayman pour des fonctions analytiques

D'abord, la solution de la conjecture pour des fonctions analytiques ultramétriques est presque immédiate et un peu plus générale que dans le cas classique. Pour l'obtenir on utilisera des propriétés élémentaires de l'analyse ultramétrique et on supposera pour des raisons techniques que $R > 1$.

Théorème 3.1.1. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ non identiquement nulle $\big($resp. soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-))$ telle que $\lim\limits_{r \to R^-} |\alpha|(r)R > 1\big)$. La fonction $f' + \alpha f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Supposons que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Il existe $\rho \in]0, +\infty[$ tel que $|\alpha|(r) > 0 \ \ \forall r \in]\rho, +\infty[$ $\Big($resp. puisque $\lim\limits_{r \to R^-} |\alpha|(r)R > 1$, par continuité il existe $\rho \in]1, R[$ tel que $|\alpha|(r) > \dfrac{1}{r} \ \ \forall r \in]\rho, R[\Big)$. De plus, d'après le Théorème 1.7.2, on sait que $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r) \ \ \forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]1, R[\big)$, ce qu'implique que $|f'|(r) < |\alpha f|(r)$ $\forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]\rho, R[\big)$. Par conséquent $|f'|(r) < |\alpha f^m|(r) \ \ \forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]\rho, R[\big)$, ce qui entraîne $|f' + \alpha f^m|(r) = |\alpha f^m|(r) \ \ \forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]\rho, R[\big)$.

Soit $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante où $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = R\big)$, telle que f admette au moins un zéro dans $C(\theta, r_n)$ et $|f' + \alpha f^m|(r) = |\alpha f^m|(r)$ $\forall r \in [r_1, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in [r_1, R[\big)$. Puisque $|f' + \alpha f^m|(r) = |\alpha f^m|(r)$ dans un voisinage de r_n, on en déduit que

$$\nu^+(f' + \alpha f^m, r_n) - \nu^-(f' + \alpha f^m, r_n) = \nu^+(\alpha f^m, r_n) - \nu^-(\alpha f^m, r_n)$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $r_n \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $r_n \in]\rho, R[\big)$, car $\nu^+(f' + \alpha f^m, r_n) - \nu^-(f' + \alpha f^m, r_n)$ et $\nu^+(\alpha f^m, r_n) - \nu^-(\alpha f^m, r_n)$ correspondent au nombre de zéros de $f' + \alpha f^m$ et αf^m dans $C(\theta, r_n)$ respectivement. Alors, le nombre de zéros de $f' + \alpha f^m$ dans $C(\theta, r_n)$ est égal au nombre de zéros de αf^m dans $C(\theta, r_n)$, en prenant en compte les multiplicités.

D'autre part, si $\omega_\gamma(f) > 0$, on a $\omega_\gamma(f' + \alpha f^m) = \omega_\gamma(f) - 1$. Donc, chaque zéro de f dans $C(\theta, r_n)$ est ou bien un zéro de $f' + \alpha f^m$ d'ordre strictement inférieur à l'ordre comme zéro de f, ou bien il n'est pas un zéro de $f' + \alpha f^m$. Mais, puisque le nombre de zéros de $f' + \alpha f^m$ dans $C(\theta, r_n)$ est égal au nombre de zéros de αf^m dans $C(\theta, r_n)$, en prenant en compte les multiplicités, la fonction $f' + \alpha f^m$ doit avoir au moins un zéro dans $C(\theta, r_n)$ qui n'est pas un zéro de f. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut conclure que $f' + \alpha f^m$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$ qui ne sont pas zéros de f. □

Remarque. Jusqu'à présent, dans $\mathbb{C}$, le résultat précédent est valable seulement si on prend pour α une constante complexe non nulle et $m \geq 3$. Pour $m = 1$ et $m = 2$, il existe des contre-exemples.

Remarque. Comme conséquence des Corollaires 1.5.6.1 et 1.5.6.1, on déduit que la fonction $g^n g'$ n'a pas de valeurs quasi-exceptionnelles dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$ quand $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En prenant en compte la première partie de la démonstration du théorème précédent et puisque, au contraire du cas classique, toute fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ n'admet pas de valeurs quasi-exceptionnelles, alors le Théorème 3.1.2, analogue au Théorème 8 [34], est immédiat.

Théorème 3.1.2. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ non identiquement nulle $\big($resp. soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-))$ telle que $\lim\limits_{r \to R^-} |\alpha|(r)R > 1\big)$. La fonction $f' + \alpha f^m$ prend chaque valeur finie une infinité de fois quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$.*

La conjecture de Hayman dans un corps ultramétrique de caractéristique résiduelle quelconque

Maintenant, on étudiera la conjecture de Hayman pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ et dans le disque $d(\theta, R^-)$. D'abord on l'étudie sur un corps de caractéristique résiduelle quelconque et ensuite sur un corps de caractéristique résiduelle nulle. Dans les Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4 et les corollaires qui suivent le Théorème 3.1.4, on supposera pour des raisons techniques que $R > 1$

Théorème 3.1.3. *Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$. Si $\lim\limits_{r \to +\infty} |\mathcal{T}|(r) > 0$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r \to R^-} |\mathcal{T}|(r)R > 1\Big)$, alors $f' + \mathcal{T}f$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Démonstration. — D'abord on montrera qu'il existe $\rho \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\rho \in]1, R[\big)$ tel que $|f'|(r) < |\mathcal{T}f|(r)$ $\forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]\rho, R[\big)$. D'après le Théorème 1.7.2, on sait que $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r)$ $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]1, R[\big)$. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, l'existence de ρ est immédiate puisque $\lim\limits_{r \to +\infty} |\mathcal{T}|(r) > 0$. Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$. Comme
$\lim\limits_{r \to R^-} |\mathcal{T}|(r)R > 1$, par continuité il existe $\rho \in]1, R[$ tel que $|\mathcal{T}|(r) > \dfrac{1}{r}$ $\forall r \in]\rho, R[$ et donc $|f'|(r) < |\mathcal{T}f|(r)$ $\forall r \in]\rho, R[$. Par conséquent, on déduit que $|f' + \mathcal{T}f|(r) = |\mathcal{T}f|(r)$ $\forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]\rho, R[\big)$.

Si on suppose que f a un nombre fini de pôles, alors il est clair que f a une infinité de zéros car $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. De plus, comme f a seulement un nombre fini de pôles et $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$, il existe une suite croissante $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = R\big)$, telle que f admette des zéros mais aucun pôle dans $C(\theta, r_n)$, $\mathcal{T}$ n'admette ni zéro ni de pôle dans $C(\theta, r_n)$ et $|f' + \mathcal{T}f|(r) = |\mathcal{T}f|(r)$ $\forall r \geq r_1$ $\big($resp. $\forall r \in [r_1, R[\big)$. Puisque $|f' + \mathcal{T}f|(r) = |\mathcal{T}f|(r)$ dans un voisinage de r_n, on a donc

$$\nu^+(f' + \mathcal{T}f, r_n) - \nu^-(f' + \mathcal{T}f, r_n) = \nu^+(f, r_n) - \nu^-(f, r_n), \tag{3.2}$$

où $\nu^+(f'+\mathcal{T}f,r_n)-\nu^-(f'+\mathcal{T}f,r_n)$ et $\nu^+(f,r_n)-\nu^-(f,r_n)$ correspondent au nombre de zéros en prenant en compte les multiplicités, de $f'+\mathcal{T}f$ et f dans $C(\theta,r_n)$ respectivement. Donc, $f'+\mathcal{T}f$ a des zéros dans $C(\theta,r_n)$ et le nombre de zéros de $f'+\mathcal{T}f$ dans $C(\theta,r_n)$ est égal au nombre de zéros de f dans $C(\theta,r_n)$ en prenant en compte les multiplicités.

D'autre part, chaque zéro de f dans $C(\theta,r_n)$ est ou bien un zéro de $f'+\mathcal{T}f$ d'ordre strictement inférieur à l'ordre comme zéro de f, ou bien il n'est pas un zéro de $f'+\mathcal{T}f$. Donc, d'après (3.2), il existe au moins un zéro de $f'+\mathcal{T}f$ qui n'est pas un zéro de f dans $C(\theta,r_n)$. Comme c'est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$, on conclut que $f'+\mathcal{T}f$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.

Maintenant, si on suppose que f a une infinité de pôles, alors il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=+\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=R\big)$, telle que f admette des pôles dans $C(\theta,r_n)$, $\mathcal{T}$ n'admette ni zéro ni de pôle dans $C(\theta,r_n)$ et $|f'+\mathcal{T}f|(r)=|\mathcal{T}f|(r)$ $\forall r\geq r_1$ $\big($resp. $\forall r\in[r_1,R[\big)$.

Notons s_n et t_n le nombre de zéros et de pôles de f dans $C(\theta,r_n)$ respectivement, et γ_n et τ_n le nombre de zéros et de pôles de $f'+\mathcal{T}f$ dans $C(\theta,r_n)$ respectivement. Alors, $\nu^+(f,r_n)-\nu^-(f,r_n)=s_n-t_n$ et $\nu^+(f'+\mathcal{T}f,r_n)-\nu^-(f'+\mathcal{T}f,r_n)=\gamma_n-\tau_n$. Comme $|f'+\mathcal{T}f|(r)=|\mathcal{T}f|(r)$ dans un voisinage de r_n, on a

$$\nu^+(f,r_n)-\nu^-(f,r_n)=\nu^+(f'+\mathcal{T}f,r_n)-\nu^-(f'+\mathcal{T}f,r_n),$$

c'est-à-dire, $s_n-t_n=\gamma_n-\tau_n$ dans $C(\theta,r_n)$. Mais τ_n est aussi le nombre de pôles de f' dans $C(\theta,r_n)$ en prenant en compte les multiplicités, et comme $\mathcal{T}$ n'admet pas de zéros ni de pôles dans $C(\theta,r_n)$, on déduit que $\tau_n>t_n$ ce qui entraîne $\gamma_n>s_n$. Alors, $f'+\mathcal{T}f$ a au moins un zéro dans $C(\theta,r_n)$ qui n'est pas un zéro de f. Puisque c'est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$, on conclut que $f'+\mathcal{T}f$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f. $\square$

Remarque. Le théorème précédent n'est pas valable dans $\mathbb{C}$ puisque, si on considère $f(x)=e^x$, la fonction $f'+f$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$.

Théorème 3.1.4. *Soit* $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ *transcendante* $\big($*resp.* $f\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$, *soit* $\mathcal{T}=\dfrac{A}{B}\in\mathbb{K}(x)$ *où* $\deg(A)\geq\deg(B)$ *et soit* $m\in\mathbb{N}$. *Si* $\limsup\limits_{r\to+\infty}|f|(r)>0$ $\big($*resp.* $\limsup\limits_{r\to R^-}|f|(r)=+\infty\big)$ *et* $m\geq 3$, *alors* $f'+\mathcal{T}f^m$ *a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de* f.

Démonstration. — D'abord on montrera qu'il existe une suite croissante d'intervalles $\big\{]r'_n,r''_n[\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\rho<r'_n<r''_n<r'_{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r''_n=+\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r''_n=R\big)$, telle que

$|f' + \mathcal{T}f^m|(r) = |\mathcal{T}f^m|(r)\ \forall r \in]r'_n, r''_n[$.

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Puisque $\limsup_{r\to+\infty} |f|(r) > 0$, il existe une suite de couronnes $\{\Gamma(0, r'_n, r''_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\rho < r'_n < r''_n$ et $\lim_{n\to+\infty} r''_n = +\infty$, et une constante $c > 0$ telle que $|f|(r) > c\ \forall r \in]r'_n, r''_n[$. Comme $\mathcal{T} \in \mathbb{K}[x]$, on peut supposer qu'il n'y a pas de zéros ni de pôles dans $\Gamma(0, r'_n, r''_n)$. De plus, puisque $\deg(A) \geq \deg(B)$, on peut aussi supposer qu'il existe une autre constante $\lambda > 0$ telle que $|\mathcal{T}|(r) \geq \lambda$ $\forall r \in]r'_n, r''_n[$. Ainsi, $|\mathcal{T}f^m|(r) > c^m\lambda\ \forall r \in]r'_n, r''_n[$. Mais, d'après le Théorème 1.7.2, on a $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r)$ et donc, $\left|\dfrac{f'}{\mathcal{T}f^m}\right|(r) \leq \dfrac{1}{r|\mathcal{T}f^{m-1}|(r)} < \dfrac{1}{\lambda r}\Big(\dfrac{1}{c}\Big)^{m-1}$ $\forall r \in]r'_n, r''_n[$, ce qui entraîne $\dfrac{1}{\lambda r}\Big(\dfrac{1}{c}\Big)^{m-1} < 1$ pour r assez grand. Ainsi $|f'|(r) < |\mathcal{T}f^m|(r)$ pour r assez grand et donc, $|f' + \mathcal{T}f^m|(r) = |\mathcal{T}f^m|(r)$. Par conséquent, cela est valable dans chaque couronne $\Gamma(0, r'_n, r''_n)$ pour r'_n assez grand et donc, sans perte de généralité, on a $|f' + \mathcal{T}f^m|(r) = |\mathcal{T}f^m|(r)\ \forall r \in]r'_n, r''_n[$.

Supposons maintenant $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$. Sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$. Puisque $\limsup_{r\to R^+} |f|(r) = +\infty$, il existe une suite de couronnes $\{\Gamma(0, r'_n, r''_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\rho < r'_n < r''_n$ et $\lim_{n\to+\infty} r''_n = R$, telles que $|f|(r) \geq n\ \ \forall r \in]r'_n, r''_n[$. Puisque $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$, il existe une constante $\lambda > 0$ tel que $\inf_{r\in[1,R[} |\mathcal{T}|(r) = \lambda$ et donc, $|\mathcal{T}f^m|(r) \geq \lambda|f|(r)n^{m-1}\ \ \forall r \in]r'_n, r''_n[$. Comme $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r)$ et $r'_n > 1$, on déduit que $|f'|(r) < |f|(r)\ \forall r \in]r'_n, r''_n[$. Ainsi, pour n assez grand, on obtient $|f'|(r) < |f|(r) < \lambda n^{m-1}|f|(r) \leq |\mathcal{T}f^m|(r)\ \ \forall r \in]r'_n, r''_n[$, ce qui entraîne que $|f' + \mathcal{T}f^m|(r) = |\mathcal{T}f^m|(r)\ \ \forall r \in]r'_n, r''_n[$.

Ensuite on montrera que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$.

Supposons $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Puisque $\limsup_{r\to+\infty} |f|(r) > 0$, il existe une suite de couronnes $\big\{\Gamma(0, r'_n, r''_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim_{n\to+\infty} r''_n = +\infty$ ainsi qu'une constante $c > 0$ telles que $Z(r, f) \geq N(r, f) + c\ \ \forall r \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]r'_n, r''_n[$. Si f a un nombre fini de zéros, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $Z(r, f) = q\log r + O(1)$ et donc, $N(r, f) + c \leq q\log r + O(1)$. Par conséquent f a aussi un nombre fini de pôles, une contradiction car f est transcendante. Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-)$. Si f a un nombre fini de zéros dans $d(0, R^-)$, on a $\lim_{r\to R^-} Z(r, f) < +\infty$ et donc, $\limsup_{r\to R^-} |f|(r) < +\infty$, une contradiction à l'hypothèse.

Finalement, on montrera que $f' + \mathcal{T}f^m$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans

$d(0,R^-)\big)$ qui n'est pas zéro de f.

Puisque f admet une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0,R^-)\big)$, il existe une suite croissante $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R\big)$, telle que f admette au moins un zéro dans chaque $C(0,r_n)$, $\mathcal{T}$ n'admette ni zéros ni pôles dans $C(0,r_n)$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$, et $|f'+\mathcal{T}f|(r) = |\mathcal{T}f|(r) \;\; \forall r \geq r_1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Puisque $|f'+\mathcal{T}f^m|(r) = |Tf^m|(r)$ dans un voisinage de r_n, on déduit que

$$\nu^+(r_n, f'+\mathcal{T}f^m) - \nu^-(r_n, f'+\mathcal{T}f^m) = \nu^+(r_n,\mathcal{T}f^m) - \nu^-(r_n,\mathcal{T}f^m). \tag{3.3}$$

Mais $f'+\mathcal{T}f^m$ et $\mathcal{T}f^m$ ont les mêmes pôles avec la même multiplicité dans $C(0,r_n)$ quand $m\geq 3$ et, $\mathcal{T}$ n'a ni zéros ni pôles dans $C(0,r_n)$. Donc, le nombre des zéros de $f'+\mathcal{T}f^m$ est le même que celui de f^m dans $C(0,r_n)$, en comptant les multiplicités. Alors chaque zéro de f dans $C(0,r_n)$ est ou bien un zéro de $f'+\mathcal{T}f^m$ avec ordre de multiplicité strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de celui comme zéro de f, ou bien il n'est pas un zéro de $f'+\mathcal{T}f^m$. Par conséquent, d'après (3.3), il existe au moins un zéro de $f'+\mathcal{T}f^m$ qui n'est pas un zéro de f dans $C(0,r_n)$. Comme cela est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$, on déduit que $f'+\mathcal{T}f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f, ce qui achève la démonstration. $\square$

Le corollaire suivant est déduit d'après le Théorème 3.1.4 en appliquant la formule de Jensen ultramétrique $\big($voir Théorème 2.1.5$\big)$.

Corollaire 3.1.4.1. *Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$. Soit $\mathcal{T}=\dfrac{A}{B}\in\mathbb{K}(x)$ où $\deg(A)\geq\deg(B)$ et soit $m\in\mathbb{N}$. Si f a un nombre fini de pôles et $m\geq 3$, alors $f'+\mathcal{T}f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Démonstration. — Il est clair que f a une infinité de zéros car $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $f\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$. Alors $\lim\limits_{r\to+\infty}|f|(r)=+\infty$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r\to R^-}|f|(r)=+\infty\Big)$ et donc, on déduit le corollaire du Théorème 3.1.4. $\square$

Corollaire 3.1.4.2. *Soit $g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $g\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$. Soit $\mathcal{T}=\dfrac{A}{B}\in\mathbb{K}(x)$. Si g a un nombre fini de zéros, alors $g^ng'-\mathcal{T}$ a une infinité de zéros quelque soit $n\in\mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Puisque g a un nombre fini de zéros, $f=\dfrac{1}{g}$ a un nombre fini de pôles. Donc, en appliquant le Corollaire 3.1.4.1 à f, la fonction $f'+\mathcal{T}f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f quand $m\geq 3$. Ainsi la conclusion est obtenue d'après (3.1). $\square$

Dans le contexte ultramétrique, le théorème suivant est un peu plus général que celui montré par W. Hayman $\big($Théorème 9 [34]$\big)$. Le Théorème 3.1.4 joue un rôle fondamental dans sa démonstration.

Théorème 3.1.5. *Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tel que $\deg(A) \geq \deg(B)$, et soit $m \in \mathbb{N}$. Si $m \geq 5$, alors $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f. De plus, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $f' + f^4$ doit avoir au moins un zéro dans $\mathbb{K}$ qui n'est pas un zéro de f.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on assume que $\mathbb{K}$ est un corps sphériquement complet et $\theta = 0$. Posons $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ n'ont pas de zéros communs. Écrivons h sous la forme $\overline{h}\,\widetilde{h}$ où les zéros de $\overline{h}$ sont les zéros différents de h sans prendre en compte les multiplicités. De plus, h' sera de la forme $u\widetilde{h}$ où $u \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $u \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$. Parallèlement, soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B}$ où $A, B \in \mathbb{K}[x]$ n'ont pas de zéros communs.

Supposons que $f' + \mathcal{T} f^m$ a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$ qui ne sont pas zéros de f. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ sans zéros communs avec Bl, tel que $f' + \mathcal{T} f^m = \dfrac{P\,\widetilde{h}}{Bl^m}$, ce qui entraîne

$$\frac{f'}{f^m} = \frac{P\widetilde{h} - Ah^m}{Bh^m} = \frac{\widetilde{h}}{h^m}\Big(\frac{P - A\overline{h}h^{m-1}}{B}\Big). \tag{3.4}$$

D'autre part,

$$\frac{f'}{f^m} = \frac{l^{m-2}(h'l - hl')}{h^m} = \frac{\widetilde{h}}{h^m}\big(l^{m-2}(ul - \overline{h}l')\big). \tag{3.5}$$

Donc,d'après (3.4) et (3.5), on a $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') = P - A\overline{h}h^{m-1}$.

Puisque $f' + \mathcal{T} f^m$ a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$ qui ne sont pas zéros de f, d'après le Théorème 3.1.4, on a $\lim\limits_{r \to +\infty} |f|(r) = 0$. Donc, comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante, on en déduit que $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante. De même, d'après le Théorème 3.1.4, on a $\limsup\limits_{r \to R^-} |f|(r) < +\infty$. Donc, comme $f \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$, on en déduit que $l \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$ sinon $l \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$ et $h \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$, ce qui entraîne $\limsup\limits_{r \to R^-} |f|(r) = +\infty$, une contradiction. Par conséquence, en posant $F = Bl^{m-2}(\mu l - \overline{h}l')$, on conclut que $F \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $F \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))\big)$.

Soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. D'après le Théorème 2.3.5, on obtient

$$\begin{aligned} T(r,F) &\leq \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}(r,F-P) + 3T(r,P) - \log r + O(1) \\ &\leq \overline{Z}(r,B) + \overline{Z}\big(r,l^{m-2}\big) + \overline{Z}(r,ul-\overline{h}l')) + \overline{Z}(r,A) + \overline{Z}\big(r,\overline{h}h^{m-1}\big) + 3T(r,P) - \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais $A, P \in \mathbb{K}[x]$. Donc $\overline{Z}(r,A) \leq T(r,A) + O(1) = \deg(A)\log r + O(1)$ et $T(r,P) = \deg(P)\log r + O(1)$. De plus, il est clair que $\overline{Z}(r,h) = \overline{Z}\big(r,\overline{h}h^{m-1}\big) = Z(r,\overline{h})$. Ainsi,

$$T(r,F) \leq Z(r,B) + Z(r,l) + Z(r,ul-\overline{h}l') + Z(r,h) + \big(\deg(A) + 3\deg(P) - 1\big)\log r + O(1). \tag{3.6}$$

D'autre part, comme $F \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $F \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$, $T(r,F) = Z(r,F) + O(1)$ et donc

$$T(r,F) = Z(r,B) + (m-2)Z(r,l) + Z(r,\mu l - \overline{h}l') + O(1). \tag{3.7}$$

Ainsi, d'après (3.6) et (3.7), on obtient

$$(m-3)Z(r,l) \leq Z(r,h) + d\log r + O(1), \tag{3.8}$$

où $d = \deg(A) + 3\deg(P) - 1$.

Comme l'ensemble des zéros de $f' + \mathcal{T}f^m$ qui ne sont pas zéros de f est un ensemble fini, on en déduit que $\limsup\limits_{r\to+\infty} |f|(r) = 0$ $\Big($resp. $\limsup\limits_{r\to R^-} |f|(r) < +\infty\Big)$ et donc, $\limsup\limits_{r\to+\infty}[Z(r,l) - Z(r,h)] = +\infty$ $\Big($resp. $\limsup\limits_{r\to R^-}[Z(r,h) - Z(r,l)] < +\infty\Big)$. Ainsi, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R\big)$, et une constante $c > 0$ telles que $Z(r_n,h) < Z(r_n,l) + c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après (3.8), on a

$$(m-4)Z(r_n,l) < d\log r_n + O(1). \tag{3.9}$$

Mais $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante. Donc, d'après le Théorème 2.1.1 et le Corollaire 2.1.7.1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Z(r_n,l)}{\log r_n} = +\infty$, une contradiction à (3.9) quand $m \geq 5$. De même, comme $l \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$, d'après le Théorème 2.1.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} Z(r_n,l) = +\infty$, une contradiction à (3.9) encore. Par conséquent, $f' + \mathcal{T}f^m$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0,R^-)\big)$ qui ne sont pas zéros de f quand $m \geq 5$.

Maintenant, supposons que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, que $\mathcal{T} \equiv 1$ et que $f' + f^4$ n'a pas d'autres zéros dans $\mathbb{K}$ que ceux de f. Donc $d = -1$. Par conséquent, d'après (3.9), on a $0 < -\log r_n + O(1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, une contradiction quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, $f' + f^4$ a au moins un zéro dans $\mathbb{K}$ qui n'est pas un zéro de f. $\square$

Le Corollaire 3.1.5.1 est immédiat d'après le Théorème précédent et (3.1).

Corollaire 3.1.5.1. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tel que $\deg(A) \geq \deg(B)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 3$ alors $g^n g' - \mathcal{T}$ a une infinité de zéros. De plus, si $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $g^2 g' - 1$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}$.*

Le théorème suivant permet de généraliser le corollaire précédent et d'une certaine façon, d'après (3.1), le Théorème 3.1.5, puisqu'il prend une fonction $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$ à la place de $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$.

Théorème 3.1.6. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et $\alpha \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_g(d(\theta, R^-))\big)$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g^n g' - \alpha$ a une infinité de zéros quel que soit $n \geq 3$.*

Démonstration. — Supposons sans perte de généralité que $\theta = 0$. Posons $G = g^n g'$ et $G_1 = \dfrac{1}{n+1} g^{n+1}$. Alors $(G_1)' = G$. Par conséquent, d'après le Corollaire 2.2.1.2, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$T(r, G_1) \leq T(r, G) + Z(r, G_1) - Z(r, G) + O(1).$$

Puisque $\alpha \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_g(d(0, R^-))\big)$, d'après le Corollaire 2.3.3.2, on a $\alpha \in \mathcal{M}_G(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_G(d(0, R^-))\big)$ et donc, en appliquant le Théorème 2.3.4 à G, on obtient

$$T(r, G) \leq \overline{Z}(r, G) + \overline{Z}(r, G - \alpha) + \overline{N}(r, G) + 4T(r, \alpha) - \log r + O(1).$$

Par conséquent, en considérant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$T(r, G_1) \leq \Big(\overline{Z}(r, G) - Z(r, G)\Big) + Z(r, G_1) + \overline{N}(r, G) + \overline{Z}(r, G - \alpha) + 4T(r, \alpha) - \log r + O(1). \tag{3.10}$$

Mais $\overline{Z}(r, G) - Z(r, G) \leq \overline{Z}(r, g) + \overline{Z}(r, g') - nZ(r, g) - Z(r, g') \leq (1-n)Z(r, g)$ et, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, G_1) = (n+1)T(r, g) + O(1)$. De plus $Z(r, G_1) = (n+1)Z(r, g) + O(1)$ et $\overline{N}(r, G) = \overline{N}(r, g)$. Par conséquent, (3.10) se réduit à

$$\begin{aligned}(n+1)T(r, g) &\leq (1-n)Z(r, g) + (n+1)Z(r, g) + \overline{N}(r, g) + Z(r, G - \alpha) + 4T(r, \alpha) - \log r + O(1)\\ &\leq 3T(r, g) + Z(r, G - \alpha) + 4T(r, \alpha) - \log r + O(1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(n-2)T(r,g) \leq Z(r, G-\alpha) + 4T(r,\alpha) - \log r + O(1)$.

Alors, puisque $n \geq 3$, on voit que

$$\frac{Z(r,G-\alpha)}{T(r,g)} \geq 1 - \frac{4T(r,\alpha) - \log r + O(1)}{T(r,g)},$$

et on en déduit que

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{Z(r,G-\alpha)}{T(r,g)} \geq 1 \quad \Big(\text{resp. } \limsup_{r\to R^-} \frac{Z(r,G-\alpha)}{T(r,g)} \geq 1\Big).$$

Par conséquent, d'après le Théorème 2.1.3, la fonction $G-\alpha$ a une infinité de zéros, c'est-à-dire que la fonction $g^n g' - \alpha$ a une infinité de zéros. □

Remarque. Puisque $f' + \alpha f^m = -\frac{1}{g^m}\big(g^{m-2}g' - \alpha\big)$, si γ n'est pas un zéro de f, on peut déduire que γ sera un zéro de $f' + \alpha f^m$ s'il satisfait l'une des conditions suivantes :

(i) γ est un zéro de $g^{m-2}g' - \alpha$ et γ n'est pas un zéro de g.

(ii) γ est un zéro de $g^{m-2}g' - \alpha$ et de g à la fois et $\omega_\gamma\big(g^{m-2}g' - \alpha\big) > m\omega_\gamma(g)$.

Après cette remarque, considérant (3.1), le théorème suivant généralise d'une certain façon le Théorème 3.1.5.

Théorème 3.1.7. *Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$ et $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0,R^-))\big)$. Si $m \geq 5$ est un entier, alors $f' + \alpha f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f sauf peut-être si f admet une infinité de pôles qui sont des zéros de α.*

La conjecture de Hayman pour les cas $m = 3$ et $m = 4$

Dans les démonstrations des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.5, on peut remarquer que les procédés utilisés ne sont pas suffisants pour pouvoir conclure que $f' + f^m$ a une infinité de zéros dans les cas $m = 3$ et $m = 4$. Tout de suite, on examine la conjecture de Hayman dans sa forme la plus simple, $f' + f^m$ où $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, et on décrit son polygone de valuation.

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs, telles que $f = \frac{h}{l}$. Alors,

$$f' + f^m = \frac{l^{m-2}(h'l - hl') + h^m}{l^m}. \tag{3.11}$$

Remarquons que les zéros de $f' + f^m$ sont exactement les zéros de $l^{m-2}(h'l - hl') + h^m$ qui ne sont pas zéros de l mais l'ensemble des zéros de $l^{m-2}(h'l - hl') + h^m$ et l'ensemble des zéros de l sont disjoints. Donc, les zéros de $f' + f^m$ sont exactement les zéros de $l^{m-2}(h'l - hl') + h^m$.

Supposons $h \in \mathbb{K}[x]$. Alors $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante puisque $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante. Par conséquent, pour $m \neq 2$, on en déduit que $l^{m-2}(h'l - hl')$ est transcendante et donc $l^{m-2}(h'l - hl') + h^m$ l'est aussi. Comme h n'a qu'un nombre fini de zéros, on déduit que $l^{m-2}(h'l - hl') + h^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de h et donc de f. Ainsi le problème est résolu quand $h \in \mathbb{K}[x]$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ quelconque.

Supposons maintenant que $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante. Puisque, d'après les Théorèmes 3.1.3 et 3.1.5, la fonction $f' + f^m$ a une infinité de zéros quand $m \geq 5$ ou quand $m = 1$, il nous reste à analyser seulement les cas $m = 3$ et $m = 4$. Supposons, par exemple, que $m = 4$.

Supposons que la fonction $f' + f^4$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$. Alors $f' + f^4 = \dfrac{l^2(h'l - hl') + h^4}{l^4}$ est de la forme $\dfrac{P}{l^4}$ où $P \in \mathbb{K}[x]$. Donc $l^2(h'l - hl') + h^4 = P$. Puisque f est transcendante, on sait que $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$ car si $l \in \mathbb{K}[x]$, d'après le Théorème 3.1.4, $f' + f^4$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f. Par conséquent $l^2(h'l - hl') \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante, ce qui entraîne que $P \in \mathcal{A}_{l^2(h'l-hl')}(\mathbb{K})$. En appliquant à $l^2(h'l - hl')$ le Théorème 2.3.5, on obtient

$$\begin{aligned} T\big(r, l^2(h'l - hl')\big) &\leq \overline{Z}\big(r, l^2(h'l - hl')\big) + \overline{Z}\big(r, l^2(h'l - hl') - P\big) + 3T(r, P) + O(1) \\ &\leq Z(r, l) + \overline{Z}(r, h'l - hl') + Z(r, h^4) + 3\deg(P)\log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais $T\big(r, l^2(h'l - hl')\big) = Z\big(r, l^2(h'l - hl')\big) + O(1)$ et $Z\big(r, l^2(h'l - hl')\big) = 2Z(r, l) + Z(r, h'l - hl')$. Donc, d'après l'inégalité précédente, on obtient

$$Z(r, l) \leq Z(r, h) + 3\deg(P)\log r + O(1). \tag{3.12}$$

Posons $g = \dfrac{1}{f}$. Comme on a supposé que la fonction $f' + f^4$ n'a qu'un nombre fini de zéros, d'après le Théorème 3.1.4, on a $\lim\limits_{r \to +\infty} |f|(r) = 0$ et , par conséquent, $\lim\limits_{r \to +\infty} |g|(r) = +\infty$. Alors, il existe une suite $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k = +\infty$, telle que g admette au moins un zéro ou un pôle dans chaque cercle $C(0, r_k)$ et n'admette ni zéros ni pôles dans chaque couronne $\Gamma(0, r_k, r_{k+1})$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Comme $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, g^3 admet un developpement de Laurent dans la couronne $\Gamma(0, r_k, r_{k+1})$. Donc, pour $r_k < |x| < r_{k+1}$, on a $-\dfrac{1}{3}g^3(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{n,k}x^n$ et sa derivée $\dfrac{f'}{f^4} = \dfrac{d}{dx}\big(-\dfrac{1}{3}g^3(x)\big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} na_{n,k}x^{n-1}$.

Soient $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ les zéros de P et soit $B = \max_{1\leq j\leq q} |\beta_j|$. Alors, il existe $\lambda > 0$ tel que $|P|(r) = \lambda r^q \ \ \forall r > B$. Comme $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante, $\lim_{r\to+\infty} \dfrac{|h|(r)}{r^t} = +\infty$ pour tout entier t fixé. De plus $\dfrac{d}{dx}\Big(-\dfrac{1}{3}g^3\Big) + 1 = \dfrac{P}{h^4}$ et, en particulier, on voit que $|a_{1,k}| = 1$. Notons $\phi(r) = \dfrac{|P|(r)}{|h^4|(r)}$. Donc,

$$\lim_{r\to+\infty} \phi(r)r^t = 0 \tag{3.13}$$

quel que soit t fixé. Puisque le développement de Laurent de $\dfrac{d}{dx}\Big(-\dfrac{1}{3}g^3\Big) + 1$ est de la forme $\sum_{-\infty,\ n\neq 1}^{+\infty} na_{n,k}x^{n-1} + c_1$, d'après (3.13), on en déduit que

$$\phi(r) = \max\big\{|c_1|,\ \sup_{n\neq 1} |na_{n,k}|r^{n-1}\big\}. \tag{3.14}$$

Pour tout $r \in]r_k, r_{k+1}[$, soit $d(k) = \nu(g^3, r)$. Comme $\nu(g^3, r) = 3\nu(g, r)$, il est clair que $d(k)$ est un multiple de 3 et donc $d(k) \neq 1$.

Puisque $\lim_{r\to+\infty} |g|(r) = +\infty$, on voit que, pour r assez grand dans $]r_k, r_{k+1}[$, on a $|g|(r) \geq 1$ et donc

$$|a_{d(k)}|r^{d(k)} > 1. \tag{3.15}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après (3.13) et (3.14), pour r assez grand dans $]r_k, r_{k+1}[$, on a $r\phi(r) \leq \varepsilon$ et donc $r\ |d(k)\ a_{d(k)}|r^{d(k)-1} < \varepsilon$, c'est-à-dire que $|d(k)||a_{d(k)}|r^{d(k)} < \varepsilon$. Par conséquent, d'après (3.15), $|d(k)| < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim_{k\to+\infty} |d(k)| = 0$. Alors, dans la couronne $\Gamma(0, r_k, r_{k+1})$, $d(k)$ est de la forme $p^{s(k)}q_k$ où p est la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$, $(p, q_k) = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} s(k) = +\infty$ quand $s(k) \neq 0$.

Quand on considère le polygône de valuation de g^3, ça donne, pour k assez grand, une "ligne" affine par morceaux dont les pentes sont multiples de $p^{s(m)}$, positives, négatives ou nulles. Maintenant dans le cas $f' + f^4$, d'après (3.12), il en resulte que la valuation de g est coincée entre l'axe des abscisses et la droite $y = \deg(P)\log r + O(1)$. Ce phénomène entraîne des cassures de pentes très nombreuses et de plus en plus fortes pour que la ligne affine ne crève aucune de ces deux droites. La ligne, affine par morceaux, zigzague donc entre ces deux droites avec des pentes de plus en plus grandes ou nulles. Par conséquent, on n'a pas le moyen d'apporter une conclusion dans les cas $m = 3$ ou $m = 4$. Néamoins le lemme suivant nous permettra de donner des conditions suffisantes pour obtenir une réponse quand $m = 3$ ou $m = 4$.

Lemme 3.1.1. *Soit* $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ *une série de Laurent convergente dans* $\Gamma(0, r', r'')$ *n'ayant ni zéros ni pôles dans* $\Gamma(0, r', r'')$ *et soit* $q = \nu(f, r)$ *quand* $r \in]r', r''[$. *Si la caractéristique résiduelle de* $\mathbb{K}$ *ne divise pas* q*, alors* $|f'(x)| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \quad \forall x \in \Gamma(0, r', r'')$.

Démonstration. — Comme f n'a ni zéros ni pôles dans $\Gamma(0, r', r'')$, d'après le Théorème 1.5.3, on a $\nu^+(f, r) = \nu^-(f, r) \quad \forall r \in]r', r''[$. Puisque $q = \nu(f, r)$, on a $|a_q||x|^q > |a_n||x|^n$ $\forall q \neq n$ et donc, $|f(x)| = |a_q||x|^q \ \forall x \in \Gamma(0, r', r'')$. Par conséquent, $|f'(x)| = |q||a_q||x|^{q-1}$ $\forall x \in \Gamma(0, r', r'')$. Mais, comme la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ ne divise pas q, on a $|q| = 1$ et donc,
$|f'(x)| = \dfrac{1}{|x|}|a_q||x|^q \ \forall x \in \Gamma(0, r', r'')$, c'est-à-dire que $|f'(x)| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \ \forall x \in \Gamma(0, r', r'')$. □

Corollaire 3.1.7.1. *Soit* $f \in \mathcal{M}(d(0, r''))$ *ayant* s *zéros et* t *pôles dans* $d(0, r')$ *et n'ayant ni zéros ni pôles dans* $\Gamma(0, r', r'')$. *Si la caractéristique résiduelle de* $\mathbb{K}$ *ne divise pas* $s - t$*, alors* $|f'(x)| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \quad \forall x \in \Gamma(0, r', r'')$.

Démonstration. — Puisque $f \in \mathcal{M}(d(0, r''))$ a s zéros et t pôles dans le disque $d(0, r')$ et n'a ni zéros ni pôles dans la couronne $\Gamma(0, r', r'')$, d'après le Théorème 1.5.3, on a $\nu^+(f, r) = \nu^-(f, r) \quad \forall r \in]r', r''[$. Donc, en posant $f = \dfrac{h}{l}$ avec $h, l \in \mathcal{A}(d(0, r''))$, on obtient
$\nu(f, r) = \nu(h, r) - \nu(l, r) = s - t \quad \forall r \in]r', r'']$. La conclusion est obtenue d'après le lemme précédent. □

Le Lemme 3.1.1 nous incite à introduire les définitions suivantes.

Définition. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$.

(i) On dira qu'un nombre $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$ est f-*convenable* si la différence entre le nombre de zéros et de pôles de f dans $d(\theta, r)$ en prenant en compte les multiplicités, n'est pas un multiple de la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$.

(ii) On dira qu'une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, +\infty[$ $\big($resp. $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, R[\big)$ est f-*convenable* si chaque r_n est f-convenable et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\big($resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R\big)$.

(*iii*) On dira que f est *optimale* s'il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$ $\big($resp. $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,R[\big)$ qui soit f-convenable.

Théorème 3.1.8. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et optimale $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))$ optimale$\big)$. La fonction $\frac{g'}{g}$ a une infinité de zéros.*

Démonstration. — D'abord supposons, sans perte de généralité, que $\theta = 0$. Puisque $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$ est une fonction optimale, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ g-convenable dans $]0,+\infty[$ $\big($resp. dans $]0,R[\big)$. Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $r'_n \in]r_n, r_{n+1}[$ tel que g n'ait ni zéros ni pôles dans la couronne $\Gamma(0, r_n, r'_n)$. Ainsi, d'après le Lemma 3.1.1, on a $\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{|x|}$ $\forall x \in \Gamma(0, r_n, r'_n)$, ce qui entraîne que $\nu\Big(\frac{g'}{g}, r\Big) = -1$ $\forall r \in]r_n, r'_n[$ et donc, la différence entre le nombre de pôles et de zéros de la fonction $\frac{g'}{g}$ dans le cercle $C(0,r)$ est 1.

D'autre part, observons que tous les pôles de $\frac{g'}{g}$ sont des pôles simples et ils correspondent aux zéros et aux pôles de g. Donc, $\frac{g'}{g}$ a une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0,R^-)\big)$ car $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$. Ainsi, quand n tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on déduit que la fonction $\frac{g'}{g}$ a une infinité de zéros ce qui achève la démostration. $\square$

Corollaire 3.1.8.1. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et optimale $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))$ et optimale$\big)$. Alors, les fonctions $g'g^n$ et $\frac{g'}{g^n}$ ont une infinité de zéros quel que soit $n \in \mathbb{N}$*

Démonstration. — Il est clair que $g'g^n = \Big(\frac{g'}{g}\Big)g^{n+1}$ et $\frac{g'}{g^n} = \Big(\frac{g'}{g}\Big)\Big(\frac{1}{g^{n-1}}\Big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, chaque zéro de $\frac{g'}{g}$ n'est pas un zéro ni un pôle de g car chaque zéro et chaque pôle de g est un pôle simple de $\frac{g'}{g}$.

D'après le Théorème 3.1.8, la fonction $\frac{g'}{g}$ a une infinité de zéros, ce qui entraîne que $g'g^n$ et $\frac{g'}{g^n}$ ont une infinité de zéros aussi dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0,R^-)\big)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Remarque. Le Théorème 3.1.8 et le Corollaire 3.1.8.1 ne sont pas valables dans le corps $\mathbb{C}$. Pour avoir un contre-exemple il suffit de prendre $f(x) = e^x$.

En prenant des fonctions optimales, les théorèmes suivants améliorent les précédents et ils nous permettent de donner des réponses à la conjecture dans tous les cas sauf $m = 2$.

Théorème 3.1.9. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et optimale. Soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}[x]$ où $\deg(A) = \deg(B)$. Si $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, alors la fonction $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration du Théorème 3.1.5, posons $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ n'ont pas de zéros communs, et écrivons h sous la forme $\overline{h}\,\widetilde{h}$ où les zéros de $\overline{h}$ sont les zéros différents de h en ne prenant pas en compte les multiplicités. Alors, h' sera de la forme $u\widetilde{h}$ où $u \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Parallèlement, $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B}$ où $A, B \in \mathbb{K}[x]$ n'ont pas de zéros commun.

Observons que

$$f' + \mathcal{T} f^m = \frac{\big(Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}\big)\widetilde{h}}{Bl^m}.$$

Il est clair que tout zéro γ de $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ qui n'est pas un zéro de $f' + \mathcal{T} f^m$ doit être un zéro de B ou l. Mais, si γ est un zéro de l, γ est un zéro de A. Donc, tous les zéros de $f' + \mathcal{T} f^m$ sont zéros de $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ sauf un nombre fini qui peuvent être des zéros de A ou B. De plus, un zéro γ de $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ est un zéro de f uniquement si γ est un zéro de B puisque γ n'est pas un zéro de u. En conclusion, tous les zéros de $f' + \mathcal{T} f^m$ qui ne sont pas des zéros de f sont les zéros de $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ sauf un nombre fini qui peuvent être des zéros de A.

Supposons que $f' + \mathcal{T} f^m$ a seulement un nombre fini de zéros qui ne sont pas des zéros de f. Donc, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que $f' + \mathcal{T} f^m = \dfrac{P\widetilde{h}}{Bl^m}$ où $P\widetilde{h}$ et Bl^m n'ont pas de zéros communs.

Remarquons que $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante. En effet, supposons $h \in \mathbb{K}[x]$. Alors $l \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$ car $f \notin \mathbb{K}(x)$, et donc $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1} \notin \mathbb{K}[x]$ et alors, d'après le Corollaire 1.5.6.1, $Bl^{m-2}(ul - \overline{h}l') + A(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ a une infinité de zéros. Par conséquent, $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f, une contradiction.

Alors, comme $h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ est transcendante, on a $\lim_{|x|\to+\infty} \left| \dfrac{P(x)}{\big(Bh^{m-1}\overline{h}\big)(x)} \right| = 0$ et, comme $\deg(A) = \deg(B)$, A et B ont le même nombre de zéros en prenant en compte les multiplicités. Donc, $\lim_{|x|\to+\infty} \left| \dfrac{A(x)}{B(x)} \right| = c$ où $c \in \mathbb{R}^+$. Alors,

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left| \frac{f'(x)}{f^m(x)} \right| = \lim_{|x|\to+\infty} \left| \frac{\big(P\widetilde{h}\big)(x)}{\big(Bh^m\big)(x)} - \frac{A(x)}{B(x)} \right| = \lim_{|x|\to+\infty} \left| \frac{P(x)}{\big(Bh^{m-1}\overline{h}\big)(x)} - \frac{A(x)}{B(x)} \right| = c.$$

En conséquence, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\nu\Big(\frac{f'}{f^m}, r\Big) = 0 \quad \forall r \geq \rho. \tag{3.16}$$

D'autre part, comme f est une fonction optimale, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]\rho, +\infty[$ qui est f-convenable et telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. Soit $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que $r_n < s_n < r_{n+1}$ et telle que $\nu(f,r)$ soit constante dans $]r_n, s_n[$. D'après la Proposition 1.4.3, on a $\nu\Big(\dfrac{f'}{f^m}, r\Big) = \nu(f', r) - m\nu(f, r)$ et d'après le Corollaire 3.1.7.1, $\nu(f', r) = \nu(f, r) - 1$ $\forall r \in]r_n, s_n[$. Ainsi,

$$\nu\Big(\frac{f'}{f^m}, r\Big) = (1-m)\nu(f, r) - 1 \quad \forall r \in]r_n, s_n[. \tag{3.17}$$

Alors, d'après (3.16) et (3.17), on a $(1-m)\nu(f,r) - 1 = 0$ $\forall r \in]r_n, s_n[$, contradiction quand $m \neq 2$. Par conséquent, si $m \neq 2$, la fonction $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ qui ne sont pas zéros de f. □

Le théorème précédent est aussi valable si on considère $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$.

Théorème 3.1.10. *Soit $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ une fonction optimale et soit $\mathcal{U} = \dfrac{\phi}{\psi} \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$ ayant le même nombre fini de zéros et de pôles dans $d(\theta, R^-)$. Si $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, alors la fonction $f' + \mathcal{U} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps sphériquement complet et $\theta = 0$. Comme dans la démonstration du Théorème 3.1.5, posons $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ n'ont pas de zéros communs, et on écrit h sous la forme $\overline{h}\,\widetilde{h}$ où les zéros de $\overline{h}$ sont les zéros différents de h en ne prenant pas en compte les multiplicités. De plus,

$h' = u\widetilde{h}$ où $u \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$. Parallèlement, $\mathcal{U} = \dfrac{\phi}{\psi}$ où $\phi, \psi \in \mathcal{M}_b(d(0,R^-))$ n'ont pas de zéros communs.

Comme $f \in \mathcal{M}(d(0,R^-))$ est une fonction optimale, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,R[$ qui est f-convenable et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R$. Soit $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que $r_n < s_n < r_{n+1}$, et telle que $\nu(f,r)$ soit constante dans $]r_n, s_n[$. D'après le Corollaire 3.1.7.1, on a $\nu(f',r) = \nu(f,r) - 1 \ \ \forall r \in]r_n, s_n[$, et d'après la Proposition 1.4.3, on a $\nu\Big(\dfrac{f'}{f^m}, r\Big) = \nu(f',r) - m\nu(f,r)$, ce qui entraîne

$$\nu\Big(\frac{f'}{f^m}, r\Big) = (1-m)\nu(f,r) - 1 \quad \forall r \in]r_n, s_n[. \tag{3.18}$$

D'autre part, on observe que

$$f' + \mathcal{U} f^m = \frac{\big(\psi l^{m-2}(ul - \overline{h}l') + \phi(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}\big)\widetilde{h}}{\psi l^m}.$$

Supposons que $f' + \mathcal{U}f^m$ a seulement un nombre fini de zéros qui ne sont pas zéros de f. Il est clair que $h \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$. En effet, supposons $h \in \mathcal{A}_b(d(0,R^-))$. Alors $l \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$ car $f \in \mathcal{M}_u(d(0,R^-))$ et donc, $\psi l^{m-2}(ul - \overline{h}l') + \phi(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1} \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$, c'est-à-dire que d'après le Corollaire 1.5.6.2, la fonction $\psi l^{m-2}(ul - \overline{h}l') + \phi(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ a une infinité de zéros. Mais, comme dans le Théorème 3.1.9, les zéros de $f' + \mathcal{U}f^m$ qui ne sont pas zéros de f sont les zéros de $\psi l^{m-2}(ul - \overline{h}l') + \phi(\overline{h})^m(\widetilde{h})^{m-1}$ sauf un nombre fini qui peuvent être des zéros de ϕ $\big($voir les arguments de la démonstration du Théorème 3.1.9$\big)$. Par conséquent, on conclut que $f' + \mathcal{U}f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f, ce qui contredit ce qu'on avait supposé.

D'autre part, comme on a supposé que $f' + \mathcal{U}f^m$ a seulement un nombre fini de zéros qui ne sont pas des zéros de f, il existe un pôlynome $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que $f' + \mathcal{U}f^m$ est de la forme $\dfrac{P\widetilde{h}}{\psi l^m}$ où $P\widetilde{h}$ et ψl^m n'ont pas de zéros communs. Par conséquent $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{P}{\psi h^{m-1}\overline{h}} - \dfrac{\phi}{\psi}$. Comme $h \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$, on a $\lim\limits_{r\to R^-} \Big|\dfrac{P}{\psi h^{m-1}\overline{h}}\Big|(r) = 0$ et comme ϕ et ψ ont les mêmes zéros en prenant en compte les multiplicités, on a $\lim\limits_{r\to R^-} \Big|\dfrac{\phi}{\psi}\Big|(r) = c$ où $c \in \mathbb{R}^+$ et donc, $\lim\limits_{r\to R^-} \Big|\dfrac{f'}{f^m}\Big|(r) = c$. Ainsi, il existe $\rho \in]0,R[$ tel que $\nu\Big(\dfrac{f'}{f^m}, r\Big) = 0 \ \ \forall r \in]\rho, R[$.

La fin de la démonstration est similaire à la fin de la démonstration du Théorème 3.1.9, c'est-à-dire que d'après (3.18), on a $(1-m)\nu(f,r) - 1 = 0 \ \ \forall r \in]r_n, s_n[$, ce qui est absurde quand $m \neq 2$. Ainsi, si $m \neq 2$, on déduit que la fonction $f' + \mathcal{U}f^m$ a une infinité de zéros dans $d(0,R^-)$ qui ne sont pas zéros de f. $\square$

En considérant (3.1), le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.1.10.1. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et optimale et, soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ où $\deg(A) = \deg(B)$. Alors $g'g^n - \mathcal{T}$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

De même, soit $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ optimale et soit $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$ ayant le même nombre fini de zéros et de pôles dans $d(\theta, R^-)$. Alors $g'g^n - \mathcal{U}$ a une infinité de zéros dans $d(\theta, R^-)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La conjecture de Hayman dans un corps ultramétrique de caractéristique résiduelle nulle

Dans un corps de caractéristique résiduelle nulle presque toutes les fonctions méromorphes sont optimales. Si une fonction n'est pas optimale, dans chaque cercle $C(\theta, r)$ son nombre de zéros est égal à son nombre de pôles et donc, $|f|(r)$ est une constante. Par conséquent, une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non optimale satisfait l'hypothèse du Théorème 3.1.4. D'après les Théorèmes 3.1.4, 3.1.9 et 3.1.10, les corollaires suivants sont immédiats.

Corollaire 3.1.10.2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ où $\deg(A) = \deg(B)$. Si $\mathbb{K}$ a une caractéristique résiduelle nulle et $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$ est un entier, alors la fonction $f' + \mathcal{T} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Corollaire 3.1.10.3. *Soit $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ telle que $|f|(r)$ n'est pas constante quand r tend vers R^-. Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$ ayant le même nombre fini de zéros et de pôles dans $d(\theta, R^-)$. Si $\mathbb{K}$ a une caractéristique résiduelle nulle et $m \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ est un entier, alors la fonction $f' + \mathcal{U} f^m$ a une infinité de zéros qui ne sont pas zéros de f.*

Enfin, d'après (3.1), les corollaires suivants sont immédiats.

Corollaire 3.1.10.4. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante et soit $\mathcal{T} = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ où $\deg(A) = \deg(B)$. Si $\mathbb{K}$ a une caractéristique résiduelle nulle, alors $g'g^n - \mathcal{T}$ a une infinité de zéros quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Corollaire 3.1.10.5. *Soit $g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ telle que $|f|(r)$ n'est pas constante quand r tend vers R^-. Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))$ ayant le même nombre fini de zéros et de pôles dans $d(\theta, R^-)\big)$. Si $\mathbb{K}$ a une caractéristique résiduelle nulle, alors $g'g^n - \mathcal{U}$ a une infinité de zéros quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque. Si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est $p \neq 0$, le problème n'est pas résolu quand $m = 2$ ou $m = 3$ ou $m = 4$. En particulier, dans un corps ultramétrique, on ne sait pas construire un contre-exemple tel comme $f(x) = \tan(-x)$ qui montre dans le corps $\mathbb{C}$ que la conjecture de Hayman n'est pas valable pour $m = 2$. On ne peut pas utiliser la même fonction puisque la fonction $f(x) = \tan(-x)$ appartient à $\mathcal{M}_b\Big(d\big(0, p^{\frac{1}{1-p}}\big)\Big)$ si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est $p \neq 0$ et appartient à $\mathcal{M}_b\big(d(0,1)\big)$ si la caractéristique résiduelle de $\mathbb{K}$ est nulle.

La conjecture de Hayman dans le cas particulier $m = 2$

Pour des raisons de caractère technique, les théorèmes précédents ne permettent pas de résoudre la conjecture dans le cas particulier $m = 2$. Le théorème suivant ne résout pas ce problème mais il permet au moins de donner une condition suffisante sur f qui assure l'existence d'au moins un zéro de $f' + f^2$. Pour montrer cela on introduit le lemme suivant qui est valable sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. sur $d(\theta, R^-)\big)$ mais aussi sur le corps de nombre complexe $\mathbb{C}$.

Lemme 3.1.2. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ *non constante et soit* $\gamma \in \mathbb{K}$ $\big($*resp.* $\gamma \in d(\theta, R^-)\big)$ *un zéro de* $\dfrac{f'}{f^2} + 1$ *qui n'est pas un zéro de* $f' + f^2$*. Alors* γ *est un pôle simple de* f *et le résidu de* f *en* γ *est* 1.

Démonstration. — Supposons d'abord $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Alors, il existe $h,\ l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs, tels que $f = \dfrac{h}{l}$. Donc $f' + f^2 = \dfrac{h'l - hl' + h^2}{l^2}$ et $\dfrac{f'}{f^2} + 1 = \dfrac{h'l - hl' + h^2}{h^2}$. Comme γ n'est pas un zéro de $f' + f^2$, alors c'est un zéro de l et donc un pôle de f. Par conséquent, $h(\gamma)l'(\gamma) - h^2(\gamma) = 0$. Mais h et l n'ont pas de zéros communs donc $l'(\gamma) = h(\gamma)$ et $h(\gamma) \neq 0$. Ainsi, γ est un pôle simple de f et le résidu de f en γ est $\dfrac{h(\gamma)}{l'(\gamma)} = 1$.

Supposons maintenant $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$. Sans perte de généralité on suppose $\theta = 0$. Soit $r \in]|\gamma|, R[$. Donc $f \in \mathcal{M}(d(0, r^-))$ et donc $f = \dfrac{h}{l}$ où $h,\ l \in \mathcal{A}(d(0, r^-))$ sans zéros communs. La démonstration continue comme dans le cas $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ci-dessus. $\square$

Théorème 3.1.11. *Soit* $f \in \mathcal{M}(K)$ *non constante et supposons que* $\dfrac{1}{f}$ *n'est pas une fonction affine. Si* $f' + f^2$ *n'a pas de zéros, alors* f *admet au moins un pôle simple* γ *dont le résidu est* 1.

Démonstration. — Supposons que $f' + f^2$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{K}$. Donc, tous les zéros de f sont simples et sont pôles de $\dfrac{f'}{f^2} + 1$ d'ordre 2. Par conséquent, si γ est un zéro de

$\dfrac{f'}{f^2}+1$, d'après le lemme précédent, γ est un pôle simple de f et le résidu de f en γ est 1.

Supposons maintenant que $\dfrac{f'}{f^2}+1$ n'a pas des zéros. Puisque chaque pôle de $\dfrac{f'}{f^2}+1$ est un zéro de f, chaque pôle de $\dfrac{f'}{f^2}+1$ est d'ordre 2 et donc, la fonction $-\dfrac{1}{f}+x$ a seulement des pôles simples. Si $-\dfrac{1}{f}+x$ n'est pas une homographie, d'après le Théorème 1.7.10, sa dérivée $\dfrac{f'}{f^2}+1$ admet au moins un zéro, une contradiction. Maintenant, si $-\dfrac{1}{f}+x$ est une homographie, c'est-à-dire que $-\dfrac{1}{f}+x$ est de la forme $\dfrac{ux+e}{sx+t}$ où $e,t\in\mathbb{K}$, $u,s\in\mathbb{K}^*$ et $\dfrac{e}{u}\neq\dfrac{t}{s}$, on a

$$\frac{1}{f}=x-\frac{ux+e}{sx+t}=\frac{sx^2+tx-ux-e}{sx+t}.$$

Posons $D=sx^2-tx-ux-e$, on obtient

$$f'+f^2=\frac{-sD+(sx+t)(-sx+u)}{D^2}.$$

Remarquons $-sD+(sx+t)(-sx+u)$ et D^2 n'ont pas de zéros communs. En effet, soit γ un zéro commun à $-sD+(sx+t)(-sx+u)$ et D. Donc $D(\gamma)=0=(s\gamma+t)(-s\gamma+u)$. Si $-s\gamma+u=0$, on a $s\gamma+t=0=u\alpha+e$ et donc, $ut=es$ une contradiction car $\dfrac{e}{u}\neq\dfrac{t}{s}$. Maintenant, si $-s\gamma+u=0$, on a $t\gamma+e=0$ et alors, $ut=es$ une contradiction de nouveau. Par conséquent, les zéros de $f'+f^2$ sont exactement les zéros de $-sD+(sx+t)(-sx+u)$. Ainsi, puisque $-sD+(sx+t)(-sx+u)$ n'est pas constante, $f+f^2$ admet au moins un zéro, une contradiction. $\square$

Remarque. Si $\dfrac{1}{f}$ est une fonction affine, évidemment $f'+f^2$ n'a pas des zéros sauf si elle est idéntiquement nulle. Si elle n'est pas idéntiquement nulle, le résidu dans chaque pôle simple est différent de 1, dans le cas général.

D'après le théorème précédent, si $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'a pas de pôles simples dont le résidu est égal à 1 et si $\dfrac{1}{f}$ n'est pas une fonction affine, alors $f'+f^m$ admet au moins un zéro pour tout entier $m\in\mathbb{N}$ sauf peut-être $m=3$.

Dans le corps $\mathbb{C}$, le fameux exemple $f(x)=\tan(-x)$ montre qu'une fonction méromorphe f peut être telle que la fonction $f'+f^2$ n'a pas de zéros. Précisément ici, chaque pôle est simple et le résidu de f dans chaque pôle est 1. Par conséquent, dans le corps $\mathbb{K}$, au moins, on peut se demander s'il existe des fonctions méromorphes ultramétriques qui ont seulement des pôles simples, avec un résidu égal à 1 en chaque pôle, telles que $f'+f^2$ n'admette aucun zéro.

3.2 Distribution des zéros des fonctions méromorphes de la forme $P'(f)f'$

Après avoir étudié la Conjecture de Hayman dans un contexte p-adique, il est naturel de se demander s'il est possible de trouver des résultats analogues en considérant des fonctions du type $P'(f)f'$ où $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ et $P \in \mathbb{K}[x]$. Le problème qu'on etudiera est le suivant :

Problème.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Peut-on conclure que la fonction $f^n(f-a)^k f' - \alpha$ admet une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$?

Comme on voit dans le Théorème 3.2.1, dans le cas $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))\big)$, la réponse est presque immédiate.

Théorème 3.2.1. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-))\big)$. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors la fonction $f^n(f-a)^k f' - \alpha$ a une infinité de zéros quels que soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Supposons, sans perte de généralité, que $\theta = 0$. Si la fonction $f^n(f-a)^k f' - \alpha$ a un nombre fini de zéros, il existe $h \in \mathbb{K}[x]$ $\big($resp. $h \in \mathcal{A}_b((d(0, R^-))\big)$ telle que $f^n(f-a)^k f' - \alpha = h$.

Puisque $\alpha, h \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha, h \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-))\big)$, on a $\alpha + h \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha + h \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-))\big)$ et donc, $f^n(f-a)^k f' \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f^n(f-a)^k f' \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-))\big)$. Par conséquent, dans $]0, +\infty[$ $\big($resp. dans $]0, R[\big)$, $T\big(r, f^n(f-a)^k f'\big)$ est de la forme $S_f(r)$. Mais, comme $f^n(f-a)^k f' \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f^n(f-a)^k f' \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$, on a

$$T\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) = Z\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) + O(1)$$

et $Z\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) \geq nZ(r, f) \geq T(r, f) + O(1)$. Ainsi $T(r, f)$ est de la forme $S_f(r)$ ce qui est absurde. $\square$

Pour répondre à la question, dans le cas $f \in \mathcal{M}(d(\mathbb{K}))$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$, on utilisera des techniques différentes de celles utilisées dans la Conjecture de Hayman. On utilisera surtout des propriétés liées aux petites fonctions.

Théorème 3.2.2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors la fonction $f^n(f-a)^k f'$ a une infinité de zéros quels que soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que $\mathbb{K}$ est sphériquement complet et $\theta = 0$. Alors, il existe $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ sans zéros communs, telles que $f = \dfrac{h}{l}$.

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))\big)$, d'après le Corollaire 1.7.8.2, f admet au plus une valeur quasi-exceptionnelle. Par suite $f^n(f-a)^k = \dfrac{h^n(h-al)^k}{l^{n+k}}$ a une infinité de zéros. Mais h et l n'ont pas de zéros communs donc, les ensemble de zéros de $h^n(h-al)^k$ et l^{n+k} sont disjoints. Ainsi $f^n(f-a)^k$ a une infinité de zéros qui ne sont pas des zéros de l et donc, des pôles de f. Par ailleurs, puisque chaque pôle de f est aussi un pôle de f', on en déduit que chaque zéro de $f^n(f-a)^k$ qui n'est pas un pôle de f est aussi un zéro de $f^n(f-a)^k f'$. Par conséquent $f^n(f-a)^k f'$ a une infinité de zéros, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.2.3. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$ non nulles et telle que α_1 ait seulement un nombre fini de pôles. Alors la fonction $\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$ qui ne sont pas pôles de f quels que soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Supposons, sans perte de généralité, que $\mathbb{K}$ est sphériquement complet et que $\theta = 0$.

Soit $f = \dfrac{h}{l}$ où $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ n'ont pas de zéros communs dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$. Soient $\alpha_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sigma_1}$ et $\alpha_2 = \dfrac{\lambda_2}{\sigma_2}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-))\big)$. On a donc $\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k = \dfrac{h^n \lambda_2(h\sigma_1 - l\lambda_1)}{l^{n+k}{\sigma_1}^k \sigma_2}$.

Si la fonction $\dfrac{h^n}{l^{n+k}\sigma_1^k \sigma_2}$ a une infinité de zéros le problème est résolu. Alors, supposons le contraire, c'est-à-dire que la fonction $\dfrac{h^n}{l^{n+k}\sigma_1^k \sigma_2}$ n'a qu'un nombre fini de zéros. Par conséquent, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R^-\big)$ la fonction $Z\Big(r, \dfrac{h^n}{l^{n+k}\sigma_1^k \sigma_2}\Big)$ est de la forme $S_f(r)$.

Comme h et l n'ont pas de zéros communs, on voit que

$$Z(r,h) \leq Z\Big(r, \frac{h^n}{l^{n+k}\sigma_1^k\sigma_2}\Big) + Z(r,\sigma_1^k\sigma_2). \tag{3.19}$$

Mais, d'après l'hypothèse, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R^-\big)$, la fonction $Z(r,\sigma_1^k\sigma_2)$ est aussi de la forme $S_f(r)$. Par conséquent, d'après (3.19), on déduit que $h \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{A}_f(d(0,R^-))\big)$, ce qui entraîne, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R^-\big)$,
$Z(r,l) = T(r,f) + O(1)$. Alors, pour r assez grand $\big($resp. assez proche de $R^-\big)$, on a $|l\lambda_1|(r) > |h\sigma_1|(r)$ et donc, on obtient que $|h\sigma_1 - l\lambda_1|(r) = |l\lambda_1|(r)$. Par conséquent, d'après le Théorème 2.1.5, il existe $\eta > 0$ tel que

$$Z(r,h\sigma_1 - l\lambda_1) = Z(r,l\lambda_1) + \eta = Z(r,l) + S_f(r) = T(r,f) + S_f(r),$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{Z(r,h\sigma_1 - l\lambda_1)}{T(r,f)} = 1$ $\Big($resp $\displaystyle\lim_{r\to R^-}\frac{Z(r,h\sigma_1 - l\lambda_1)}{T(r,f)} = 1\Big)$. Alors, d'après le Théorème 2.1.3, la fonction $h\sigma_1 - l\lambda_1$ a une infinité de zéros.

Nous allons maintenant, plus précisément, montrer que cette fonction a une infinité de zéros qui ne sont pas pôles de f. Pour cela nous évaluons la fonction $Z\big(r,\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k : l(x) \neq 0\big)$.

D'abord voyons que

$$\begin{aligned} Z(r,\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k : l(x) \neq 0) &\geq kZ(r,h\sigma_1 - l\lambda_1) - Z(r,\sigma_1) - Z(r,\sigma_2) - \\ &\quad - (n+k)Z\big(r,l : (h\sigma_1 - l\lambda_1)(x) \neq 0\big) \\ &\geq kZ(r,h\sigma_1 - l\lambda_1) - (n+k)Z\big(r,l : (h\sigma_1 - l\lambda_1)(x) \neq 0\big) - S_f(r). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Évaluons maintenant $Z\big(r,l : (h\sigma_1 - l\lambda_1)(x) = 0\big)$. Soit γ un zéro de l tel que $(h\sigma_1 - l\lambda_1)(\gamma) = 0$. Alors $h(\gamma)\sigma_1(\gamma) = 0$ ce qui entraîne $\sigma_1(\gamma) = 0$. Par conséquent, les zéros γ de l quand $(h\sigma_1 - l\lambda_1)(\gamma) = 0$ sont en nombre fini et par suite, $Z\big(r,l : (h\sigma_1 - l\lambda_1)(x) \neq 0\big) = O(\log r)$. Finalement, d'après (3.20), on obtient

$$Z\big(r,\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k : l(x) \neq 0\big) \geq kZ(r,l) - O(\log r).$$

Par conséquent, on voit que $\displaystyle\limsup_{r\to+\infty}\Big(\frac{Z\big(r,\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k : l(x) \neq 0\big)}{T(r,l)}\Big) \geq k$
$\Big($resp. $\displaystyle\limsup_{r\to R^-}\Big(\frac{Z\big(r,\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k : l(x) \neq 0\big)}{T(r,l)}\Big) \geq k\Big)$. Alors, comme l est transcendante, d'après le Théorème 2.1.3, on en déduit que l'ensemble des zéros de $\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k$ qui ne sont pas zéros de l est infini, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$ non nulles et telle que α_1 ait seulement un nombre fini de pôles. Alors la fonction $\alpha_2\ f^n(f-\alpha_1)^k f'$ a une infinité de zéros quels que soient $n, k \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Puisque chaque pôle de f est aussi un pôle de f', on déduit que chaque zéro de $\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k$ qui n'est pas un pôle de f est aussi un zéro de $\alpha_2 f^n(f-\alpha_1)^k f'$. Donc, d'après le théorème précédent, la fonction $\alpha_2\ f^n(f-\alpha_1)^k f'$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$. □

Théorème 3.2.4. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-))\big)$. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n+k \geq 4$. Alors la fonction $f^n(f-a)^k f' - \alpha$ a une infinité de zéros.*

Démonstration. — Supposons, sans perte de généralité, que $\mathbb{K}$ est sphériquement complet et $\theta = 0$. Puisque $f, \alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, \alpha \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$, il existe $h, l, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ et $\alpha = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ où h et l, respectivement σ_1 et σ_2, n'ont pas de zéros communs.

Posons $F = f^n(f-a)^k f'$ et $Q = \sigma_2 h^n(h-al)^k(h'l - hl') - \sigma_1 l^{n+k+2}$. On voit que $F - \alpha = \dfrac{Q}{\sigma_2 l^{n+k+2}}$.

D'abord on montrera que

$$Z(r, Q) < Z(F-\alpha) + 2Z(r, \sigma_2) + Z(r, l) \quad \forall r \in]0, +\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Soit γ un zéro de Q, considérons les 4 cas suivants :

Cas 1. $(\sigma_2 l)(\gamma) \neq 0$.
Si $\sigma_2(\gamma) \neq 0$ et $l(\gamma) \neq 0$, on a $\omega_\gamma(Q) = \omega_\gamma(F-\alpha)$.

Cas 2. $\sigma_2(\gamma) \neq 0,\ l(\gamma) = 0$.
Si $\sigma_2(\gamma) \neq 0$ et $l(\gamma) = 0$, on a $\omega_\gamma(h) = \omega_\gamma(h - al) = 0$ et donc, on a $\omega_\gamma\big(\sigma_2 h^n(h-al)^k(h'l - hl')\big) = \omega_\gamma(h'l - hl') = \omega_\gamma(l) - 1$ et $\omega_\gamma\big(\sigma_1 l^{n+k+2}\big) = \omega_\gamma(\sigma_1) + (n+k+2)\omega_\gamma(l)$, ce qui entraîne $\omega_\gamma\big(\sigma_1 l^{n+k+2}\big) > \omega_\gamma\big(\sigma_2 h^n(h-al)^k(h'l - hl')\big)$. Par conséquent $\omega_\gamma(Q) = \omega_\gamma(l) - 1$.

Cas 3. $\sigma_2(\gamma) = 0,\ l(\gamma) \neq 0$.
Si $\sigma_2(\gamma) = 0$ et $l(\gamma) \neq 0$, on a $\sigma_1(\gamma) \neq 0$ et donc, $\sigma_1 l^{n+k+2}(\gamma) \neq 0$ ce qui entraîne $Q(\gamma) \neq 0$, une contradiction.

Cas 4. $\sigma_2(\gamma)=0,\ \ l(\gamma)=0.$

Si $\sigma_2(\gamma)=0$ et $l(\gamma)=0$, on a $\omega_\gamma(\sigma_1)=\omega_\gamma(h)=\omega_\gamma(h-al)=0$ et donc, on a

$$\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)=\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(h'l-hl')=\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)-1$$

et $\omega_\gamma\big(\sigma_1l^{n+k+2}\big)=(n+k+2)\omega_\gamma(l)$.

Si $\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)>\omega_\gamma\big(\sigma_1l^{n+k+2}\big)$, on a

$$\omega_\gamma(Q)=\omega_\gamma\big(\sigma_1l^{n+k+2}\big)<\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)-1.$$

Si $\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)<\omega_\gamma\big(\sigma_1l^{n+k+2}\big)$, on a

$$\omega_\gamma(Q)=\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)=\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)-1.$$

Si $\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)=\omega_\gamma\big(\sigma_1l^{n+k+2}\big)$, on déduit que $\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)-1=\omega_\gamma(l^{n+k+2})$ et aussi que $\omega_\gamma(Q)\ge\omega_\gamma\big(\sigma_2h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big)$. Mais

$$\omega_\gamma(Q)\le\omega_\gamma(F-\alpha)+\omega_\gamma(\sigma_2l^{n+k+2})=\omega_\gamma(F-\alpha)+\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l^{n+k+2}),$$

ce qui entraîne

$$\omega_\gamma(Q)\le\omega_\gamma(F-\alpha)+2\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)-1.$$

Donc, si $\sigma_2(\gamma)=0$ et $l(\gamma)=0$, on en déduit que

$$\omega_\gamma(Q)<\omega_\gamma(F-\alpha)+2\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l).$$

Par conséquent, en considérant les 4 cas précédents, on obtient que

$$\omega_\gamma(Q)<\omega_\gamma(F-\alpha)+2\omega_\gamma(\sigma_2)+\omega_\gamma(l)$$

pour tout zéro γ de Q. Donc, on peut conclure que

$$Z(r,Q)<Z(r,F-\alpha)+2Z(r,\sigma_2)+Z(r,l)$$

quel que soit $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$.

Supposons maintenant que $Z(r,F-\alpha)$ est de la forme $S_f(r)$ pour tout $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$. Donc, comme $\sigma_2\in\mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\sigma_2\in\mathcal{A}_f(d(0,R^-))\big)$, on déduit aussi que $Z(r,F-\alpha)+2Z(r,\sigma_2)$ est de la forme $S_f(r)$ quand $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. quand $r\in]0,R[\big)$. Par conséquent

$$Z(r,Q)<Z(r,l)+S_f(r)\le T(r,f)+S_f(r)\ \forall r\in]0,+\infty[\ \ \big(\text{resp. } \forall r\in]0,R[\big).$$

Donc, d'après le Théorème 2.1.5, on a

$$\log\big(|Q|(r)\big) < T(r,f) + S_f(r) \quad \forall r \in]0,+\infty[\quad \big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big). \tag{3.21}$$

D'autre part, on voit que $Z\big(r, \sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big) > nZ(r,h) = nZ(r,f)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big)$ et aussi que

$$Z(r, \sigma_1 l^{n+k+2}) \geq (n+k+2)Z(r,l) = (n+k+2)N(r,f) > nN(r,f)$$

$\forall r \in]0,+\infty[$ $\big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big)$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\max\big\{Z\big(r,\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big), Z(r,\sigma_1 l^{n+k+2})\big\} > n\max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} &= \\ = nT(r,f) + O(1)&\end{aligned}$$

$\forall r \in]0,+\infty[$ $\big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big)$. Par conséquent, d'après le Théorème 2.1.5,

$$\max\big\{\log\big|\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big|(r),\ \log\big|\sigma_1 l^{n+k+2}\big|(r)\big\} > nT(r,f) + O(1) \tag{3.22}$$

$\forall r \in]0,+\infty[$ $\big(\text{resp. } \forall r \in]0,R[\big)$. Ainsi, d'après (3.21) et (3.22), on en déduit qu'il existe $\rho \in]0,+\infty[$ $\big(\text{resp. } \rho \in]0,R[\big)$ tel que, si $r \in]\rho,+\infty[$ $\big(\text{resp. si } r \in]\rho,R[\big)$, on obtient

$$|Q|(r) < \max\big\{\big|\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big|(r)\ ,\ \big|\sigma_1 l^{n+k+2}\big|(r)\big\}$$

et donc, $\Big|\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\Big|(r) = \big|\sigma_1 l^{n+k+2}\big|(r)$. Alors, d'après le Corollaire 2.1.5.1, on a

$$Z\big(r,\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big) = Z(r,\sigma_1 l^{n+k+2}) + \eta, \tag{3.23}$$

où $\eta = \log\Big|\Big(\dfrac{\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]}{\sigma_1 l^{n+k+2}}\Big)(0)\Big|$. Mais

$$Z(r,\sigma_1 l^{n+k+2}) = (n+k+2)Z(r,l) + S_f(r)$$

et

$$Z\big(r,\sigma_2\big[h^n(h-al)^k(h'l-hl')\big]\big) \leq nZ(r,h) + (k+2)\max\big\{Z(r,h),\ Z(r,l)\big\} + S_f(r).$$

Donc, d'après (3.23), on a $Z(r,h) \geq Z(r,l) + S_f(r)$. Par conséquent,

$$Z(r,f) = T(r,f) + S_f(r). \tag{3.24}$$

Posons, maintenant,

$$F_1 = \frac{1}{n+k+1} f^{n+k+1} - \binom{k}{1} \frac{a}{n+k} f^{n+k} + \ldots + \binom{k}{k-1} \frac{(-a)^{k-1}}{n+2} f^{n+2} + \frac{(-a)^k}{n+1} f^{n+1} -$$
$$- \Big[\frac{a^{n+k+1}}{n+k+1} - \binom{k}{1} \frac{a^{n+k+1}}{n+k} + \ldots + \binom{k}{k-1} \frac{(-a)^{n+k+1}}{n+2} + \frac{(-a)^{n+k+1}}{n+1} \Big].$$

Clairement, il existe $P \in \mathbb{K}[x]$ avec $\deg(P) = n$, tel que F_1 peut écrit sous la forme $(f-a)^{k+1} P(f)$. De plus, on voit que $(F_1)' = F$ et donc, d'après le Corollaire 2.2.1.2, on a

$$T(r, F_1) \leq T(r, F) + Z(r, F_1) - Z(r, F) + O(1).$$

Mais, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, F_1) = (n+k+1)T(r, f) + O(1)$, ce qui entraîne

$$(n+k+1)T(r, f) \leq T(r, F) + Z(r, F_1) - Z(r, F) + O(1). \tag{3.25}$$

Par ailleurs, puisque $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$, d'après le Corollaire 2.3.3.2, on a aussi $\alpha \in \mathcal{M}_F(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_F(d(0, R^-))\big)$. Donc, en appliquant le Théorème 2.3.4 à F, on obtient

$$T(r, F) \leq \overline{Z}(r, F) + \overline{Z}(r, F - \alpha) + \overline{N}(r, F) + S_F(r)$$

et ainsi, d'après (3.25), on a

$$(n+k+1)T(r, f) \leq \Big(\overline{Z}(r, F) - Z(r, F)\Big) + \overline{Z}(r, F - \alpha) + \overline{N}(r, F) + Z(r, F_1) + S_F(r). \tag{3.26}$$

Mais, d'après le Lemme 2.2.1, on a $Z(r, F) = nZ(r, f) + kZ(r, f-a) + Z(r, f')$ et $\overline{Z}(r, F) = \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, f-a) + \overline{Z}(r, f') \leq Z(r, f) + Z(r, f-a) + Z(r, f')$. Donc,

$$Z(r, F) - \overline{Z}(r, F) \geq (n-1)Z(r, f) + (k-1)Z(r, f-a). \tag{3.27}$$

De plus,

$$\overline{N}(r, F) = \overline{N}(r, f) \leq N(r, f) \quad \text{et} \quad Z(r, F_1) \leq (k+1)Z(r, f-a) + Z\big(r, P(f)\big) \tag{3.28}$$

Maintenant, en considérant (3.27) et (3.28) dans (3.26), on obtient

$$(n+k+1)T(r, f) \leq (1-n)Z(r, f) + (1-k)Z(r, f-a) + N(r, f) + (k+1)Z(r, f-a) +$$
$$+ \ Z(r, P(f)) + \overline{Z}(r, F - \alpha) + S_F(r),$$

c'est-à-dire que

$$(n+k+1)T(r, f) \leq \Big(- nZ(r, f) + T(r, P(f))\Big) + 4T(r, f) + \overline{Z}(r, F - \alpha) + S_F(r).$$

Alors, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, P(f)) = nT(r, f) + O(1)$ et comme, d'après (3.24), on a $Z(r, f) = T(r, f) + S_f(r)$, l'inégalité précédente est réduite à

$$(n + k - 3)T(r, f) \leq \overline{Z}(r, F - \alpha) + S_F(r),$$

une contradiction car $n + k \geq 4$ et on avait supposé que $Z(r, F - \alpha)$ est de la forme $S_f(r)$. Par conséquent, on a $\limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{Z(r, F - \alpha)}{T(r, f)} > 0$ $\Big($resp. $\limsup\limits_{r\to R^-} \dfrac{Z(r, F - \alpha)}{T(r, f)} > 0\Big)$ ce qui entraîne, d'après le Théorème 2.1.3, que la fonction $F - \alpha$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

D'aprés le Théorème 3.2.4, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.2.4.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soit $a \in \mathbb{K}$ non nulle et soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n + k \geq 4$. Alors, la fonction $f^n(f - a)^k f'$ n'admet pas de valeurs quasi-exceptionnelles dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$.*

Chapitre 4

Unicité des fonctions méromorphes qui partagent une certaine fonction

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'unicité de fonctions méromorphes ultramétriques satisfaisant certaines équations fonctionnelles. Ce type de problèmes provient d'un grand nombre d'autres problèmes étudiés durant ces dernières années, particulièrement des problèmes associés aux ensembles d'unicité avec (ou sans) multiplicité et des problèmes associés aux poynômes d'unicité pour des fonctions analytiques ou des fonctions méromorphes dans le corps $\mathbb{C}$ ou dans le corps ultramétrique $\mathbb{K}$ $\big($voir, par exemple, [7], [12], [15], [18], [19], [22], [23], [30], [32], [33], [37], [40], [42], [45], [49], [51], [59]$\big)$.

Les polynômes d'unicité ont été introduits et étudiés dans $\mathbb{C}$ par X. Hua et C. C. Yang $\big($voir [41], [42]$\big)$, et par H. Fujimoto $\big($voir [31]$\big)$. En analyse ultramétrique ils ont été étudiés d'abord par T. T. H. An et H. K. Ha et plus tard par T. T. H. An, J. T-Y Wang et P. Wong $\big($voir [3], [4], [5], [6]$\big)$.

Définition.

(i) Un polynôme P est appelé *polynôme d'unicité* pour une famille des fonctions $\mathcal{F}$, si pour $f, g \in \mathcal{F}$ telles que $P(f) = P(g)$, on a $f = g$.

(ii) Une fonction méromorphe h définie dans un corps E $\big(E = \mathbb{K}$ ou $E = \mathbb{C}\big)$ est appelé *fonction d'unicité* pour une famille de fonctions $\mathcal{F}$ définie sur un sous-ensemble convenable de E, si pour $f, g \in \mathcal{F}$ satisfaisant $h \circ f = h \circ g$, f et g sont égales.

Dans $\mathbb{C}$, H. Fujimoto [31] a introduit la condition suivante pour obtenir des polynômes d'unicité :

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, soient $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_q$ les zéros différents de P' et soit (4.1) la condition

$$P(\gamma_i) \neq P(\gamma_j) \quad 1 \leq i < j \leq q. \tag{4.1}$$

Dans $\mathbb{K}$, A. Escassut généralise certains résultats obtenus par H. Fujimoto dans $\mathbb{C}$ [31] et par T. T. H. An et H. K. Ha [2] qui concernent des polynômes d'unicité, pour caractériser d'une certaine façon les fonctions d'unicité. Il montre, par exemple dans le Théorème 3 [22], que :

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ est de la forme $x^n - bx^{n-1} + t$ $(t \in \mathbb{K})$, alors il n'est pas une fonction d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Une généralisation immédiate montre que la conclusion précédente est vraie aussi quand P' a exactement deux zéros différents et que l'un d'entre eux est d'ordre 1.

En supposant que l'ensemble de zéros $\mathcal{S}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ est affinement rigide, c'est-à-dire que l'unique transformation affine qui préserve l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'identité, et en supposant que P satisfait l'hypothèse (4.1), le Théorème 1 [5] montre que : *si P' a exactement deux zéros différents γ_1 et γ_2 d'ordre c_1 et c_2 respectivement, alors P est une fonction d'unicité si et seulement si* $\min\{c_1, c_2\} \geq 2$. Le Théorème 4.1.1 suivant montre que l'hypothèse *affinement rigide* et l'hypothèse (4.1) ne sont pas nécessaires pour caractériser une fonction d'unicité qui concerne des polynômes P tels que P' ait exactement deux zéros différents. Ce résultat a été obtenu par A. Escassut [24] et N. T. Hoa [37] séparément.

Théorème 4.1.1. (Théorème 2.3 [37]) *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que P' admet exactement deux zéros distincts γ_1 et γ_2 d'ordre c_1 et c_2 respectivement. Alors P est une fonction d'unicité pour $\mathcal{A}(\mathbb{K})$. De plus, si* $\min\{c_1, c_2\} \geq 2$*, alors P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.*

Remarque. Remarquons qu'on ne sait pas si le Théorème 4.1.1 est vrai si on considère des fonctions $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ ou $f \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ parce que la démonstration requiert une théorie de courbes algébriques sur $d(\theta, R^-)$. V. Berkovich dans [9] introduit justement une théorie de courbes algébriques qui est valide, pour le moment, seulement sur le corps $\mathbb{K}$. Néanmoins, en suivant d'une manière particulière le travail de A. Boutabaa et A. Escassut dans [15] et [16] et ensuite, le travail de G. Frank et M. Reinders dans [30] nous obtenons les résultats suivants qui concernent des polynômes d'unicité pour l'ensemble des fonctions $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ et pour l'ensemble des fonctions $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$.

Théorème 4.1.2. *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que P' admet seulement deux zéros distincts, l'un de deux d'ordre 1. Alors P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}_u(d(0, R^-))$.*

Démonstration. — Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ les zéros de P' avec $x_1 \neq x_2$. D'après l'hypothèse, on suppose x_1 d'ordre $n-2$ ($n \geq 3$), et x_2 d'ordre 1. Alors

$$P(x) = (x - x_1)^{n-1}\Big((x - x_1) + \frac{n}{n-1}(x_1 - x_2)\Big) + c,$$

où $c \in \mathbb{K}$ et $n \geq 3$.

Soient $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ telles que $P(f) = P(g)$. Posons $f_1 = f - x_1$ et $g_1 = g - x_1$. Alors

$$f_1^{n-1}\big(f_1 + (x_1 - x_2)\big) = g_1^{n-1}\big(g_1 + (x_1 - x_2)\big).$$

Posons maintenant $h = \dfrac{f_1}{g_1}$ et supposons $h \neq 1$. D'après l'égalité précédente, on a

$$g_1 = (x_2 - x_1)\Big(\frac{h^{n-1} - 1}{h^n - 1}\Big).$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ différentes de 1. Alors, chaque γ_i $(i = 1, ..., n-1)$ n'est pas une racine de l'équation $x^{n-1} - 1 = 0$. Donc, si $h(x) = \gamma_i$ pour un $1 \leq i \leq n-1$, x est un pôle de g_1. Mais $g_1 \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-)$ et donc, chaque γ_i $(i = 1, ..., n-1)$, est une valeur exceptionnelle de h. Puisque $n \geq 3$, h admet au moins deux valeurs exceptionnelles et par suite, d'après le Corollaire 1.7.8.2, $h \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$. Par conséquent $g_1 \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$, une contradiction à l'hypothèse. Ainsi $h = 1$ et $f_1 = g_1$ et donc $f = g$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque. Le polynôme $P(x) = (x - x_1)^{n-1}(x - x_2)$ $(n \geq 3)$, n'est pas un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ ou pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ $\big($voir [22] et [41]$\big)$.

Rappelons cet exemple donné par A. Escassut, L. Haddad et R. Vidal dans [22]. Par changement affine de variable, on peut évidemment se ramener à $P(y) = y^n - y^{n-1} + c$ où $c \in \mathbb{K}$. Considérons alors $h \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ et posons $g = \dfrac{h^{n-1} - 1}{h^n - 1}$ et $f = hg$. Alors on vérifie que $P(f) = P(g)$.

Pour montrer le Théorème 4.1.3, on aura besoin du lemme suivant. En général, il est valable pour un corps algébriquement clos de caractéristique zéro comme l'est $\mathbb{K}$. La démonstration ci-dessous est nouvelle et purement algébrique, cela ne requiert pas l'usage de l'analyse complexe.

Lemme 4.1.1. *Soit $n \geq 3$ un entier, et soit*

$$Q(x) = (n-1)^2(x^n - 1)(x^{n-2} - 1) - n(n-2)(x^{n-1} - 1)^2 \in \mathbb{K}[x]$$

où $\deg(Q) = 2n-2$. *Alors* 1 *est un zéro du polynôme* Q *d'ordre de multiplicité* 4 *et tous les autres zéros de* Q *sont simples.*

Démonstration. — Remarquons qu'on peut aussi écrire Q sous la forme

$$x^{2n-2} - (n-1)^2 x^n + 2n(n-2)x^{n-1} - (n-1)^2 x^{n-2} + 1,$$

d'où $Q'(x) = 2(n-1)x^{2n-3} - n(n-1)^2 x^{n-1} + 2n(n-1)(n-2)x^{n-2} - (n-1)^2(n-2)x^{n-3}$ et, de la même façon, on peut obtenir les dérivées restantes. Donc, il est facile de voir que $Q^{(k)}(1) = 0$ quand $k = 0, 1, 2, 3$ et, $Q^{(4)}(1) = 2n(n-1)^2(n-2) \neq 0$ pour tout $n \geq 3$. Ainsi, 1 est un zéro de Q d'ordre 4.

Maintenant, il nous reste seulement à montrer que tous les autres zéros de Q sont simples. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{K}$ tel que $Q(x) = Q'(x) = 0$. Si $Q'(x) = 0$, on a

$$(n-1)x^{n-3}\Big(2x^n - n(n-1)x^2 + 2n(n-2)x - (n-1)(n-2)\Big) = 0.$$

Mais, comme évidemment $x \neq 0$, on a

$$2x^n - n(n-1)x^2 + 2n(n-2)x - (n-1)(n-2) = 0. \tag{4.2}$$

Donc, en faisant $Q(x) = 0$ et en considérant (4.2), on obtient

$$(n-1)(n-2)x^n - 2n(n-2)x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - 2 = 0$$

c'est-à-dire que

$$2x^n\Big((n-1)(n-2)x^2 - 2n(n-2)x + n(n-1)\Big) = 4x^2.$$

Alors, en considérant (4.2) dans l'égalité précédente, on a

$$\Big(n(n-1)x^2 - 2n(n-2)x + (n-1)(n-2)\Big)\Big((n-1)(n-2)x^2 - 2n(n-2)x + n(n-1)\Big) = 4x^2.$$

Par conséquent, en résolvant l'équation ci-dessus, on obtient

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4 = 0,$$

et donc, on en déduit que 1 est l'unique zéro commun de Q et Q', c'est-à-dire que 1 est l'unique zéro multiple de Q. Ainsi

$$Q(x) = (x-1)^4(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_{2n-6})$$

d'où chaque $\gamma_i \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ et $\gamma_i \neq \gamma_j$ pour tout $i \neq j$ et $i = 1, \ldots, 2n-6$. $\square$

Le polynôme

$$P(x) = (n-2)(n-1)x^n - 2n(n-2)x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - c$$

où $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, a été introduit dans $\mathbb{C}$ par G. Frank et M. Reinders dans [30]. Il a permis la découverte d'URSCM de seulement 11 points pour les fonctions méromorphes complexes. Ci-dessous, on utilise un polynôme similaire mais à coefficients dans $\mathbb{K}$. On montre que celui-là est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$.

Théorème 4.1.3. *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que P' admet seulement deux zéros distincts d'ordre c_1 et c_2 respectivement. Si $\deg(P) \geq 6$ et $\min\{c_1, c_2\} = 2$, alors P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(0, R^-))$.*

Démonstration. — Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ les zéros de P' avec $x_1 \neq x_2$. D'après l'hypothèse, on suppose x_1 d'ordre $c_1 = n-3$ $(n \geq 6)$ et x_2 d'ordre $c_2 = 2$. Alors

$$P(x) = \frac{1}{n}\,(x-x_1)^n \;-\; 2\frac{x_1 - x_2}{n-1}\,(x-x_1)^{n-1} \;+\; \frac{(x_1-x_2)^2}{n-2}\,(x-x_1)^{n-2} \;+\; c,$$

où $c \in \mathbb{K}$ et $n \geq 6$.

Soient $f, g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$ telles que $P(f) = P(g)$. Posons $f_1 = f - x_1$ et $g_1 = g - x_1$. Si $h \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$ est telle que $f_1 = hg_1$, on obtient

$$(n-1)(n-2)(h^n-1)g_1^2 - 2an(n-2)(h^{n-1}-1)g_1 + a^2 n(n-1)(h^{n-2}-1) = 0. \qquad (4.3)$$

Supposons $h \neq 1$. On remarque que $h^n - 1 \neq 0$ car si $h^n = 1$, alors $h^{n-1} - 1$ est une constante non nulle, ce qui entraîne que g_1 est une constante, une contradiction car $g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$.

Supposons d'abord $h \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$. D'après (4.3), pour $r \in]0, R[$, on obtient

$$T\big(r, (n-1)(n-2)(h^n-1)g_1^2\big) \geq 2T(r, g_1) + O(1)$$

et

$$T\big(r, 2an(n-2)(h^{n-1}-1)g_1 - a^2 n(n-1)(h^{n-2}-1)\big) \leq T(r, g_1) + S_g(r),$$

une contradiction.

Supposons maintenant $h \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$. Avec un simple calcul, on peut écrire (4.3) sous la forme

$$\Big((n-1)(n-2)(h^n-1)g_1 - an(n-2)(h^{n-1}-1)\Big)^2 = -a^2 n(n-2)Q(h) \qquad (4.4)$$

où $Q(x) = (n-1)^2(x^n-1)(x^{n-2}-1) - n(n-2)(x^{n-1}-1)^2$ est un polynôme de degré $2n-2$. Puisque $n \geq 6$, d'après le Lemme 4.1.1, on en déduit que $Q(x)$ est de la forme $(x-1)^4(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)...(x-\gamma_{2n-6})$, où chaque $\gamma_i \in \mathbb{K}\setminus\{0,1\}$ $\big(i = 1, ..., 2n-6\big)$, est un zéro simple de Q. Par conséquent, d'après (4.4), chaque zéro de $h-\gamma_i$ $\big(i = 1, ..., 2n-6\big)$ a un ordre de multiplicité au moins 2 et donc

$$\sum_{i=1}^{2n-6} \overline{Z}(r, h-\gamma_i) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-6} Z(r, h-\gamma_i) \leq (n-3)T(r,h) + O(1).$$

Ainsi, en appliquant à h le Théorème 2.2.4 aux points γ_i $\big(i = 1, ..., 2n-6\big)$ et en considérant que $\overline{N}(r,h) \leq T(r,h)$, on obtient

$$\begin{aligned}(2n-7)T(r,h) &\leq \sum_{i=1}^{2n-6} \overline{Z}(r, h-\alpha_i) + \overline{N}(r,h) + O(1)\\ &\leq (n-2)T(r,h) + O(1).\end{aligned}$$

Puisque, d'après le Théorème 2.1.2, $T(r,h)$ est non bornée dans $]0, R[$, on a une contradiction quand $n \geq 6$.

Par conséquent $h = 1$, ce qui entraîne $f_1 = g_1$ et achève la démonstration. □

Remarque. Le Théorème 4.1.1 montre que si un polynôme P est tel que P' admette seulement 2 zéros distincts, tous les deux d'ordre ≥ 2, alors P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$. Aucun résultat analogue n'existe pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ ni même pour $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ puisque pour obtenir la réponse positive pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ on utilise des propriétés d'imparamétrabilité des courbes de genre ≥ 1 qui ne sont pas disponibles dans $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))$.

Ici, on a pu montrer que si l'ordre de multiplicité de l'un des deux zéros de P' est exactement 2 (l'autre ≥ 3), alors P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$. Cette constatation pose la question de savoir si les polynômes P tels que P' n'ait que 2 zéros distincts d'ordre ≥ 2, sont tous des polynômes d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ ou, au moins, pour $\mathcal{A}(d(\theta, R^-))$.

En fait, dans la démonstration du Théorème 4.1.3, on utilise cette propriété élémentaire : "$ax^2 + bx + c$ peut toujours s'écrire sous la forme $(\alpha x + \beta)^2 + \gamma$" , mais il n'en va pas de même pour un polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ...

Exemple des polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ et $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$:

Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les Théorèmes 4.1.2 et 4.1.3 respectivement, on en déduit que le polynôme $P(x) = \dfrac{1}{n+2}x^{n+2} - \dfrac{a}{n+1}x^{n+1}$ où $n \geq 1$, est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$, et le polynôme $P(x) = \dfrac{1}{n+3}x^{n+3} - \dfrac{2a}{n+2}x^{n+2} + \dfrac{a^2}{n+1}x^{n+1}$ où $n \geq 3$, est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$.

4.2 Unicité des fonctions méromorphes qui partagent une constante

D'abord rappelons la définition suivante :

Définition. Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ non-constantes et soit $a \in \mathbb{K}$. On dira que *les fonctions f et g partagent la valeur a* C. M. $\big($resp. I. M.$\big)$, si les fonctions $f - a$ et $g - a$ ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités $\big($resp. en ignorant les multiplicités$\big)$ dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$.

Le problème qu'on étudiera ici est très lié à la définition ci-dessus. Ce problème est le suivant :

Problème.

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ou bien soient $f, g \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))$ telles que $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent une valeur finie $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ C. M. ou bien I. M.. Peut-on conclure que $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$?

Pendant les dix dernières années, ce type de problème a été étudié en analyse complexe dans plusieurs articles $\big($voir, par exemple, [28], [41], [57], [59]$\big)$ qui concernent des fonctions analytiques ou des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ en obtenant quelques conclusions. Dans plusieurs cas ils donnent une réponse positive à notre question, dans d'autres cas la réponse est $fg = 1$.

Ici, on obtient toujours la même conclusion. De plus, on peut aussi conclure quand on considère $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ ou bien $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$.

4.2.1 Fonctions méromorphes qui partagent une valeur CM.

Théorème 4.2.1. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non-constantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soit n un entier ≥ 2 $\big($resp. $\geq 3\big)$. Si $f^n f' = g^n g'$, alors $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$.*

Démonstration. — Si $f^n f' = g^n g'$, il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que $f^{n+1} = g^{n+1} + c$. Supposons $c \neq 0$. D'après le Théorème 3 [14], les fonctions f et g sont constantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_b(d(\theta, R^-))\big)$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $f^{n+1} = g^{n+1}$ d'où $f = dg$ et $d^{n+1} = 1$. □

Théorème 4.2.2. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non-constantes et soient $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 3. Si $\omega_\gamma(f^n - a) = \omega_\gamma(g^n - b)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$, alors il existe $d \in \mathbb{K}$ tel que $d^n = \dfrac{a}{b}$ et $f = dg$.*

Démonstration. — Puisque $\omega_\gamma(f^n - a) = \omega_\gamma(g^n - b)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ et $n \geq 3$, on déduit que $f^n - a$ et $g^n - b$ partagent les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $\mathbb{K}$ en prenant en compte les multiplicités, ce qui entraîne que la fonction $\dfrac{f^n - a}{g^n - b} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'a ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$. Alors, il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ non nulle, telle que

$$f^n - a = c(g^n - b). \tag{4.5}$$

Clairement $f^{n-1}f' = cg^{n-1}g'$. Donc, en posant $l^n = c$ et $g_1 = lg$, on obtient $f^{n-1}f' = g_1^{n-1}g_1'$. Comme $n - 1 \geq 2$, d'après le Théorème 4.2.1, il existe $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f = kg_1$ et $k^n = 1$, c'est-à-dire que $f = (kl)g$ et $(kl)^n = c$. Donc, d'après (4.5), on a $cg^n - a = cg^n - cb$, ce qui entraîne $c = \dfrac{a}{b}$. Ainsi, il existe $d = kl \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f = dg$ et $d^n = \dfrac{a}{b}$. □

Pour montrer le théorème suivant on utilisera des éléments classiques de la théorie de Nevanlinna ultramétrique, principalement le Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions.

Théorème 4.2.3. *Soient $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ et soient $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 4. Si $\omega_\gamma(f^n - a) = \omega_\gamma(g^n - b)$ pour tout $\gamma \in d(\theta, R^-)$, alors il existe $d \in \mathbb{K}$ tel que $d^n = \dfrac{a}{b}$ et $f = dg$.*

Démonstration. — Puisque $\omega_\gamma(f^n - a) = \omega_\gamma(g^n - b)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $f^n - a$ et $g^n - b$ partagent les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $d(\theta, R^-)$ en prenant en compte les multiplicités. Donc, la fonction $\phi = \dfrac{f^n - a}{g^n - b}$ n'a ni zéros ni pôles dans $d(\theta, R^-)$, ce qui entraîne que $\phi \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$.

Sans perte de généralité, on assume $\theta = 0$. Supposons $\phi \neq \frac{a}{b}$. Posons $\phi_1 = a - \phi b$. Clairement $\phi,\ \phi_1 \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-)) \cap \mathcal{A}_g(d(0, R^-))$ car $f, g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$. Donc, en appliquant le Corollaire 2.3.4.1 à f^n, pour $r \in]0, R[$, on a

$$T(r, f^n) \leq \overline{Z}(r, f^n) + \overline{Z}(r, f^n - \phi_1) + \overline{N}(r, f^n) + S_f(r). \tag{4.6}$$

Remarquons que $\overline{Z}(r, f^n - \phi_1) = \overline{Z}(r, \phi g^n) \leq \overline{Z}(r, \phi) + \overline{Z}(r, g) \leq T(r, \phi) + T(r, g)$ et donc, $\overline{Z}(r, f^n - \phi_1) \leq T(r, g) + S_g(r)$. De plus $\overline{Z}(r, f^n) = \overline{Z}(r, f) \leq T(r, f)$, $\overline{N}(r, f^n) = \overline{N}(r, f) \leq T(r, f)$ et, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f^n) = nT(r, f) + O(1)$.

Par ailleurs, comme $\phi, \phi_1 \in \mathcal{M}_g(d(0, R^-))$ et $f^n = \phi g^n + \phi_1$, d'après le Théorème 2.3.1, on déduit que $T(r, f) = T(r, g) + S_g(r)$. Donc, d'après l'équation (4.6), on a

$$nT(r, f) \leq 3T(r, f) + S_f(r),$$

une contradiction quand r tend vers R^- car $T(r, f)$ est non bornée dans $]0, R[$ et $n \geq 4$. Ainsi, $\phi = \frac{a}{b}$ et $f^n = \frac{a}{b} g^n$. Par conséquent, il existe une constante $d \in \mathbb{K}$ où $d^n = \frac{a}{b}$, et donc, f peut être écrite sous la forme dg. $\square$

En utilisant un procédé analogue à celui utilisé pour la démonstration du Théorème 4.2.2 $\big($resp. Théorème 4.2.3$\big)$ et en considérant que $\overline{N}(r, g) = 0$ $\big($resp. $\overline{N}(r, f) = 0\big)$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.2.4. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non-constantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 2 $\big($resp. $\geq 3\big)$. Si $\omega_\gamma(f^n - a) = \omega_\gamma(g^n - b)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\gamma \in d(\theta, R^-)\big)$, alors $f = dg$ où $d^n = \frac{a}{b}$.*

Pour la démonstration du corollaire suivant, il suffit de supposer que $a = b$ dans le Théorème 4.2.4.

Corollaire 4.2.4.1. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non-constantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 2 $\big($resp. $\geq 3\big)$. Si f^n et g^n partagent la valeur a C. M., alors et $f = dg$ où $d^n = 1$.*

Théorème 4.2.5. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non-constantes. Soient $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 2. Si $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., alors $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$.*

Démonstration. — Puisque $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., on en déduit que la fonction $\dfrac{f^n f' - a}{g^n g' - a} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'a ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$ et donc elle est égale à une constante $c \in \mathbb{K}$ non nulle.

Supposons $c \neq 1$. Donc $f^n f' = c\ g^n g' + a(1-c)$ et alors il existe $c_0 \in \mathbb{K}$ tel que

$$f^{n+1} - cg^{n+1} = (n+1)a(1-c)x + c_0.$$

Mais $f^{n+1} - cg^{n+1}$ peut être écrit sous la forme $\prod_{i=1}^{n+1}(f - b_i g)$ où chaque b_i $\big(i = 1, ..., n+1\big)$ est une $(n+1)$-ième racine de c. Donc,

$$(n+1)a(1-c)x + c_0 = (f - b_1 g)(f - b_2 g)...(f - b_{n+1} g).$$

Par conséquent, il existe au plus une de ces fonctions $f - b_i g$ qui a un zéro. Comme $n \geq 2$, on voit qu'au moins deux de ces fonctions $f - b_i g$ sont constantes. Donc, on en déduit que f et g sont constantes, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $c = 1$ et

$$f^{n+1} = g^{n+1} + c_0. \tag{4.7}$$

Supposons maintenant $c_0 \neq 0$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à f^{n+1}, pour $r \in]0, +\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f^{n+1}) &\leq \overline{Z}(r, f^{n+1}) + \overline{Z}(r, f^{n+1} - c_o) - \log r + O(1) \\ &\leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, g) - \log r + O(1) \\ &\leq T(r, f) + T(r, g) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais, d'après (4.7) et le Théorème 2.3.1, on en déduit que $T(r, f) = T(r, g) + O(1)$. Alors

$$(n+1)T(r, f) \leq 2T(r, f) - \log r + O(1).$$

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante, on a $n < 1$ quand r tend vers $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $c_0 = 0$ et $f^{n+1} = g^{n+1}$. En conclusion, il existe $d \in \mathbb{K}$ tel que $f = dg$ et $d^{n+1} = 1$. □

En considérant le théorème sur trois petites fonctions, on peut montrer aussi un théorème analogue au précédent pour des fonctions dans $\mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$.

Théorème 4.2.6. *Soient $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soit n un entier ≥ 4. Si $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., alors $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$.*

Démonstration. — Posons $\phi = \dfrac{f^n f' - a}{g^n g' - a}$. Puisque $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., on en déduit que la fonction ϕ n'a ni zéros ni pôles dans $d(\theta, R^-)$. Donc $\phi \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))$.

Sans perte de généralité, on assume $\theta = 0$. Supposons $\phi \neq 1$. Posons $F = f^n f'$ et $\phi_1 = a(1-\phi)$. Clairement $F \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$ et $\phi_1 \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$. Donc $\phi_1 \in \mathcal{A}_F(d(0, R^-))$.

Soit $r \in]0, R[$. En appliquant le Théorème 2.3.5 à F, on obtient

$$T(r, F) \leq \overline{Z}(r, F) + \overline{Z}(r, F - \phi_1) + S_f(r). \tag{4.8}$$

Remarquons que $\overline{Z}(r, F - \phi_1) = \overline{Z}(r, \phi g^n g') \leq T(r, \phi) + T(r, g) + T(r, g')$. Mais, $T(r, \phi)$ est de la forme $S_f(r)$, et d'après le Lemme 4.3.4, on a $T(r, g') \leq T(r, g) + O(1)$. Donc, $\overline{Z}(r, F - \phi_1) \leq 2T(r, g) + S_f(r)$. De plus, il est facile de voir que $\overline{Z}(r, F) \leq T(r, f) + T(r, f')$ et $T(r, F) = nT(r, f) + T(r, f')$. Ainsi, d'après l'inégalité (4.8), on a

$$(n-1)T(r, f) \leq 2T(r, g) + S_f(r).$$

En appliquant une procédé semblable à la fonction $G = g^n g'$, on obtient

$$(n-1)T(r, g) \leq 2T(r, f) + S_g(r).$$

Par conséquent, en additionnant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$(n-1)\big[T(r, f) + T(r, g)\big] \leq 2\big[T(r, f) + T(r, g)\big] + S_f(r) + S_g(r),$$

une contradiction quand r tend vers R^- car $n \geq 4$ et $T(r, f)$ et $T(r, g)$ sont des fonctions non bornées dans $]0, R[$. Donc $\phi = 1$.

La fin de la démonstration est analogue à la fin de la démonstration du Théorème 4.2.5, en considérant que, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f) = T(r, g) + S_g(r)$. $\square$

Le Théorème 4.2.7 est destiné à établir un résultat comparable au Théorème 4.2.6 en s'appliquant à des fonctions méromorphes, sa démonstration nécessitera d'abord d'établir les Lemmes 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3 qui suivent.

Lemme 4.2.1. *Soit $f, g \in \mathcal{A}(d(\theta, R^-))$. Si γ est un zéro simple commun de $f - 1$ et $g - 1$, alors γ est aussi un zéro de la fonction*

$$\frac{f''}{f'} - 2\frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2\frac{g'}{g-1}.$$

Démonstration. — Supposons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\theta)^n$. Sans perte de généralité, on suppose $\theta=0$ et $\gamma=0$. Grâce au développement en série de Taylor de f en 0, on a $\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{1}{a_1x}+f_1(x)$ où $f_1\in\mathcal{A}(d(0,R^-))$ et $a_1\neq 0$, d'où on déduit que

$$\frac{f'(x)}{\big(f(x)-1\big)^2}=-\frac{1}{a_1x^2}+f_1'(x). \tag{4.9}$$

De même, on obtient que $\dfrac{1}{g(x)-1}=\dfrac{1}{b_1x}+g_1(x)$ où $g_1\in\mathcal{A}(d(0,R^-))$ et $b_1\neq 0$, d'où

$$\frac{g'(x)}{\big(g(x)-1\big)^2}=-\frac{1}{b_1x^2}+g_1'(x). \tag{4.10}$$

Donc, d'après (4.9) et (4.10), on a

$$\frac{f'(x)}{\big(f(x)-1\big)^2}\cdot\frac{\big(g(x)-1\big)^2}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{a_1}-x^2f_1'(x)}{\frac{1}{b_1}-x^2g_1'(x)}=u+vx^2+wx^3+...$$

où $u,v\neq 0$. Alors,

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{f'(x)}{\big(f(x)-1\big)^2}\cdot\frac{\big(g(x)-1\big)^2}{g'(x)}=1+\Big(\frac{v}{u}\Big)x^2+\Big(\frac{w}{u}\Big)x^3+...$$

et donc, pour x voisin de 0, on peut appliquer la fonction logarithme ultramétrique $\log(1+t)$ définie pour $t\in d(0,1^-)$ et alors on obtient

$$\log\Big(\frac{1}{u}\cdot\frac{f'(x)}{\big(f(x)-1\big)^2}\cdot\frac{\big(g(x)-1\big)^2}{g'(x)}\Big)=\Big(\frac{v}{u}\Big)x^2+\Big(\frac{w}{u}\Big)x^3+...-\Big(\frac{v^2}{2u^2}\Big)x^4-\Big(\frac{w^2}{2u^2}\Big)x^6-...$$

Par conséquent, en appliquant la derivée logarithmique, on a

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}-2\frac{f'(x)}{f(x)-1}-\frac{g''(x)}{g'(x)}+2\frac{g'(x)}{g(x)-1}=\Big(\frac{2v}{u}\Big)x+\Big(\frac{3w}{u}\Big)x^2+...-\Big(\frac{2v^2}{u^2}\Big)x^3-\Big(\frac{3w^2}{u^2}\Big)x^5-...$$

D'où, on voit clairement que $x=0$ est un zéro de la fonction $\dfrac{f''}{f'}-2\dfrac{f'}{f-1}-\dfrac{g''}{g'}+2\dfrac{g'}{g-1}$, ce qui achève la démonstration. □

Notation. Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f\in\mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$. Dorénavant, pour $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$, on pose $Z_{2)}(r,f):=Z(r,f)-Z_1(r,f)$ et $\overline{Z}_{2)}(r,f):=\overline{Z}(r,f)-Z_1(r,f)$. De même, on pose $N_{2)}(r,f):=N(r,f)-N_1(r,f)$ et $\overline{N}_{2)}(r,f):=\overline{N}(r,f)-N_1(r,f)$.

Lemme 4.2.2. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ non-constantes. On suppose que 0 n'est ni zéro ni pôle de f, f', g et g'. Si f et g partagent la valeur 1 C. M., alors l'une des trois conditions suivantes est satisfaite*

(i) $T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}_{2)}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}_{2)}(r, g) + \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}_{2)}(r, f) + \overline{Z}(r, g) + \overline{Z}_{2)}(r, g) - 2\log r + O(1)$ *pour* $r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp. pour* $r \in]0, R[\big)$. *De plus, la même inégalité est vraie si on échange f et g.*

(ii) $f \equiv g$.

(iii) $fg \equiv 1$.

Démonstration. — Notre démonstration prend comme référence la démonstration du Lemma 5 [41], mais on doit vérifier chaque inégalité pour aboutir à une conclusion où intervient $-\log r$.

Posons $\Psi = \dfrac{f''}{f'} - 2\dfrac{f'}{f-1} - \dfrac{g''}{g'} + 2\dfrac{g'}{g-1}$. Clairement Ψ peut être écrite sous la forme $\dfrac{\psi'}{\psi}$ où $\psi = \Big(\dfrac{f'}{(f-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(g-1)^2}{g'}\Big)$.

Pour la démonstration, sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$. On va considérer d'abord le cas $\Psi \neq 0$ et ensuite le cas $\Psi = 0$.

Cas 1. $\Psi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{K} \quad \big($resp. $\forall z \in d(0, R^-)\big)$.

Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. Soit $r \in]0, R[\big)$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à f on obtient

$$T(r, f) \leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, f-1) + \overline{N}(r, f) - Z\big(r, f' : f(x) \neq 0, 1\big) - \log r + O(1) \quad (4.11)$$

Puisque Ψ est de la forme $\dfrac{\psi'}{\psi}$, d'après le Corollaire 2.1.5.2, on a $Z(r, \Psi) \leq N(r, \Psi) + O(1)$. Mais, comme f et g partagent la valeur 1 C. M., si $\omega_\gamma(f-1) = 1$, d'après le Lemme 4.2.1, on a $\omega_\gamma(\Psi) > 0$, c'est-à-dire que $Z_1(r, f-1) \leq Z(r, \Psi)$. Ainsi, on obtient

$$Z_1(r, f-1) \leq N(r, \Psi) + O(1). \quad (4.12)$$

D'autre part, puisque f et g partagent la valeur 1 C. M., on voit que $\dfrac{f'}{f-1}$ et $\dfrac{g'}{g-1}$ ont un pôle simple avec le même résidu en chaque point β tel que $f(\beta) = 1$. Par suite Ψ n'a pas de pôle aux points β où $f(\beta) = 1$. De plus, quand f a un pôle simple γ, le résidu de $\dfrac{f'}{f-1}$ en γ est -1 tandis que le résidu de $\dfrac{f''}{f'}$ en γ est -2, donc Ψ n'a pas de pôle en

γ. Par conséquent, si Ψ a un pôle, ou bien f ou g a un pôle multiple ou bien f' ou g' a un zéro. Alors, d'après (4.12), on a

$$\begin{aligned} Z_1(r, f-1) \leq & \overline{N}_{2)}(r, f) + \overline{N}_{2)}(r, g) + \overline{Z}\big(r, f' : f(x) \neq 0, 1\big) + \overline{Z}\big(r, g' : g(x) \neq 0, 1\big) + \\ & + \overline{Z}_{2)}(r, f) + \overline{Z}_{2)}(r, g) + O(1). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Maintenant, en considérant la définition de $\overline{Z}\big(r, g' : g(x) \neq 0, 1\big)$, on en déduit que

$$\overline{Z}\big(r, g' : g(x) \neq 0, 1\big) + \overline{Z}_{2)}(r, g-1) + Z_{2)}(r, g) - \overline{Z}_{2)}(r, g) \leq Z(r, g').$$

Mais, d'après le Lemme 4.3.1, on a $Z(r, g') \leq Z(r, g) + \overline{N}(r, g) - \log r + O(1)$. Alors,

$$\overline{Z}\big(r, g' : g(x) \neq 0, 1\big) + \overline{Z}_{2)}(r, g-1) \leq \overline{Z}(r, g) + \overline{N}(r, g) - \log r + O(1). \tag{4.14}$$

De plus, comme f et g partagent la valeur 1 C. M., on a $\overline{Z}(r, f-1) = \overline{Z}(r, g-1)$. Ainsi, il est clair que

$$\overline{Z}(r, f-1) = \overline{Z}_1(r, f-1) + \overline{Z}_{2)}(r, g-1) \leq Z_1(r, f-1) + \overline{Z}_{2)}(r, g-1). \tag{4.15}$$

En conclusion, d'après (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15), on obtient (i)

$$\begin{aligned} T(r, f) \leq & \overline{N}(r, f) + \overline{N}_{2)}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}_{2)}(r, g) + \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}_{2)}(r, f) + \overline{Z}(r, g) + \overline{Z}_{2)}(r, g) - \\ & - 2 \log r + O(1). \end{aligned}$$

Cas 2. $\Psi(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{K} \quad \big(\text{resp. } \forall z \in d(0, R^-)\big)$.

Rappelons que Ψ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où $u = \Big(\dfrac{f'}{(f-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(g-1)^2}{g'}\Big)$. Comme $\Psi = 0$, il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que $\dfrac{f'}{(f-1)^2} = c\ \dfrac{g'}{(g-1)^2}$ et donc, il existe une autre constante $d \in \mathbb{K}$ telle que $\dfrac{1}{f-1} = \dfrac{c}{g-1} - d$. Par conséquent, f peut être écrite sous la forme $\dfrac{Ag+B}{Cg+D}$ où $A, B, C, D \in \mathbb{K}$.

Supposons $AC \neq 0$. Donc $f - \dfrac{A}{C} = \dfrac{B - \frac{AD}{C}}{Cg+D}$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à f, on a

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}\Big(r, f - \frac{A}{C}\Big) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \end{aligned}$$

et on en déduit (i).

Supposons maintenat $A \neq 0$ et $C = 0$. Donc $f - \dfrac{B}{D} = \dfrac{A}{D}\, g$. Si $B \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}\Big(r, f - \frac{B}{D}\Big) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \end{aligned}$$

et donc, on en déduit (i).

Si $B = 0$, on a $f = \dfrac{A}{D}\, g$. Supposons $\dfrac{A}{D} \neq 1$. Comme f et g partagent la valeur 1 C.M., il est clair que si $f(x) \neq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$, on aura $g(x) \neq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$ et donc, $f(x) \neq \dfrac{A}{D} \ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$. D'après le Corollaire 1.7.8.2, la fonction f est une constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))\big)$, une contradiction à l'hypothèse. Par conséquent $\dfrac{A}{D} = 1$ et donc $f = g$.

Ensuite, supposons $A = 0$ et $C \neq 0$. Donc $g + \dfrac{D}{C} = \dfrac{B}{Cf}$. Si $D \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} T(r,g) &\leq \overline{Z}(r,g) + \overline{Z}\Big(r, g + \frac{D}{C}\Big) + \overline{N}(r,g) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r,g) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,g) - \log r + O(1) \end{aligned}$$

et donc on a (i).

Si $D = 0$, on a $g = \dfrac{B}{Cf}$. Supposons $\dfrac{B}{C} \neq 1$. Comme f et g partagent la valeur 1 C. M., il est clair que $g(x) \neq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$ et $g(x) \neq \dfrac{B}{C} \ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$. Donc, d'après le Corollaire 1.7.8.2, la fonction g est une constante $\big($resp. $g \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))\big)$, une contradiction à l'hypothèse. Par conséquent $\dfrac{B}{C} = 1$ et donc $fg = 1$. $\square$

Lemme 4.2.3. *Il n'existe pas de fonctions $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ telles que $f' f^n g' g^n \equiv 1$ quand $n \geq 2$.*

Démonstration. — Supposons que f a un zéro γ d'ordre s dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$. Puisque $f' f^n g' g^n = 1$, on en déduit que γ est un pôle de g d'ordre par exemple t. Alors

$$ns + s - 1 = nt + t + 1,$$

c'est-à-dire que $(s-t)(n+1) = 2$, ce qui est impossible parce que $n \geq 2$ et s, t sont entiers. En remplaçant f par g, on obtient la même conclusion. Par conséquent, on en déduit que

f et g n'ont pas de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$.

Comme $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ sont transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et n'ont pas de zéros dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $\phi, \psi \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ telles que $f = \dfrac{1}{\phi}$ et $g = \dfrac{1}{\psi}$. Par conséquent

$$1 = f^n f' g^n g' = \frac{1}{\phi^n}\frac{\phi'}{\phi^2}\frac{1}{\psi^n}\frac{\psi'}{\psi^2} = \frac{\phi'\psi'}{(\phi\psi)^{n+2}}$$

et donc, $\phi'\psi' = (\phi\psi)^{n+2}$.

Comme $\phi, \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\phi, \psi \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$, d'après le Théorème 1.4.1, on a $|\phi'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|\phi|(r)$ $\forall r > 0$ $\big($resp. $\forall r \in]0, R[\big)$ et $|\psi'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|\psi|(r)$ $\forall r > 0$ $\big($resp. $\forall r \in]0, R[\big)$. Ainsi $(|\phi\psi|(r))^{n+2} = |\phi'\psi'|(r) \leq \dfrac{|\phi\psi|(r)}{r^2}$, une contradiction parce que $|\phi|(r)$ et $|\psi|(r)$ sont des fonctions non-bornées quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$. $\square$

Dans le cas classique $\big($voir Théorème 1 [41]$\big)$ les auteurs montrent que :
Si deux fonctions méromorphes f et g dans $\mathbb{C}$ sont telles que $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur $a \in \mathbb{C}$ où a n'est ni 0 ni ∞, et si n est un entier ≥ 11, alors ou bien $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$ ou bien f et g sont des fonctions exponentielles, $c_1 e^{-cz}$ et $c_2 e^{cz}$ respectivement où c, c_1 et c_2 sont des constantes et $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -a^2$.

Ici, sous une hypothèse similaire, on peut montrer la première conclusion, tandis que la deuxième est exclue.

Théorème 4.2.7. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))$ et soient $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 11. Si $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., alors $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$.*

Démonstration. — Posons $F = \dfrac{f^{n+1}}{a(n+1)}$ et $G = \dfrac{g^{n+1}}{a(n+1)}$. Puisque $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a C. M., on voit que F' et G' partagent la valeur 1 C. M.

Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. Sans perte de gńéralité, on suppose $\theta = 0$. Puisque

$$N(r, F') = N(r, F) + \overline{N}(r, F) = (n+1)N(r, f) + \overline{N}(r, f),$$

on a $nN(r, f) = N(r, F') - N(r, f) - \overline{N}(r, f)$. Mais

$$\begin{aligned} N(r, F') - N(r, f) - \overline{N}(r, f) &\leq N(r, F') - N(r, f) + Z(r, f) - Z(r, f') + O(1) \\ &\leq T(r, F') + T(r, f) - N(r, f) - Z(r, f') + O(1). \end{aligned}$$

Donc,

$$nN(r,f) \leq T(r,F') + T(r,f) - N(r,f) - Z(r,f') + O(1). \tag{4.16}$$

D'autre part, comme $aF' = f^n f'$, on en déduit que $Z(r,F') = nZ(r,f) + Z(r,f')$, c'est-à-dire que $nZ(r,f) = Z(r,F') - Z(r,f')$. Mais,

$$\begin{aligned} Z(r,F') - Z(r,f') &= Z(r,F') + N(r,f) - N(r,f) - Z(r,f') \\ &\leq T(r,F') + T(r,f) - N(r,f) - Z(r,f') + O(1). \end{aligned}$$

Donc,

$$nZ(r,f) \leq T(r,F') + T(r,f) - N(r,f) - Z(r,f') + O(1). \tag{4.17}$$

Par conséquent, d'après (4.16) et (4.17), on voit que

$$nT(r,f) = \max\left\{nZ(r,f) + O(1),\ nN(r,f)\right\} \leq T(r,F') + T(r,f) - N(r,f) - Z(r,f') + O(1),$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} 2T(r,f) + Z(r,f') &= \frac{2}{n-1}\Big((n-1)T(r,f) + Z(r,f')\Big) + \frac{n-3}{n-1}Z(r,f') \\ &\leq \frac{2}{n-1}\Big(T(r,F') - N(r,f)\Big) + \frac{n-3}{n-1}\Big(Z(r,f) + \overline{N}(r,f)\Big) + O(1) \\ &\leq \frac{2}{n-1}\Big(T(r,F') - \overline{N}(r,f)\Big) + \frac{n-3}{n-1}\Big(T(r,f) + \overline{N}(r,f)\Big) + O(1) \\ &\leq \frac{2}{n-1}\Big(T(r,F') - \overline{N}(r,f)\Big) + \frac{n-3}{n-1}\Big(\frac{1}{n-1}\ T(r,F') + \overline{N}(r,f)\Big) + O(1) \\ &\leq \frac{3n-5}{(n-1)^2}\ T(r,F') + \frac{n-5}{n-1}\ \overline{N}(r,f) + O(1). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Mais,

$$\overline{N}(r,f) = \overline{N}(r,F') = \overline{N}_{2)}(r,F') \leq \frac{1}{(n+2)}\ N(r,F') \leq \frac{1}{(n+2)}\ T(r,F') + O(1). \tag{4.19}$$

Donc, d'après (4.18) et (4.19), on en déduit que

$$2T(r,f) + Z(r,f') \leq \frac{4n^2 - 5n - 5}{(n+2)(n-1)^2}T(r,F') + O(1). \tag{4.20}$$

Par ailleurs, remarquons que

$$\overline{Z}(r,F') + \overline{Z}_{2)}(r,F') = 2\overline{Z}(r,f^n) + 2\overline{Z}(r,f') - Z_1(r,f') \leq 2T(r,f) + Z(r,f') + O(1).$$

Donc, d'après (4.20), on a

$$\overline{Z}(r,F') + \overline{Z}_{2)}(r,F') \leq \frac{4n^2 - 5n - 5}{(n+2)(n-1)^2}T(r,F') + O(1). \tag{4.21}$$

De même pour G', d'après (4.19) et (4.21), on obtient

$$\overline{N}(r,g) = \overline{N}(r,G') = \overline{N}_{2)}(r,G') \leq \frac{1}{(n+2)} N(r,G') \leq \frac{1}{(n+2)} T(r,G') + O(1) \tag{4.22}$$

et

$$\overline{Z}(r,G') + \overline{Z}_{2)}(r,G') \leq \frac{4n^2-5n-5}{(n+2)(n-1)^2} T(r,G') + O(1). \tag{4.23}$$

En appliquant le Lemme 4.2.2 à F' et G', on doit considérer les 3 cas suivants :

Cas 1.

Supposons (i) du Lemme 4.2.2, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} T(r,F') \leq\ & \overline{N}(r,F') + \overline{N}_{2)}(r,F') + \overline{N}(r,G') + \overline{N}_{2)}(r,G') + \overline{Z}(r,F') + \overline{Z}_{2)}(r,F'))+ \\ & + \overline{Z}(r,G') + \overline{Z}_{2)}(r,G') - 2\log r + O(1). \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{I}$ non-borné tel que $T(r,G') \leq T(r,F')$ pour tout $r \in \mathcal{I}$. Prenons $r \in \mathcal{I}$ et considérons (4.19), (4.21), (4.22) et (4.23) dans l'inégalité ci-dessus. On a $T(r,F') \leq \dfrac{12n^2-18n-6}{(n+2)(n-1)^2} T(r,F') - 2\log r + O(1)$, c'est-à-dire que

$$\frac{n^3-12n^2+15n+8}{(n+2)(n-1)^2} T(r,F') \leq -2\log r + O(1). \tag{4.24}$$

Posons $P(n) = n^3 - 12n^2 + 15n + 8$. On voit que $P(11) = 52$ et $P'(n) = 3n^2 - 24n + 15$ est strictement positif quand $n \geq 8$. Donc le polynôme $P(n)$ est strictement positif quand $n \geq 11$, une contradiction d'après (4.24).

Cas 2.

Supposons (ii) du Lemme 4.2.2, c'est-à-dire que $F' = G'$. Alors, il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $f^{n+1} = g^{n+1} + c$. Supposons $c \neq 0$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à f^{n+1}, on obtient

$$\begin{aligned} T(r,f^{n+1}) &\leq \overline{Z}(r,f^{n+1}) + \overline{Z}(r,f^{n+1}-c) + \overline{N}(r,f^{n+1}) - \log r + O(1) \\ &\leq \overline{Z}(r,f^{n+1}) + \overline{Z}(r,g^{n+1}) + \overline{N}(r,f^{n+1}) - \log r + O(1) \\ &\leq \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ &\leq 2T(r,f) + T(r,g) - \log r + O(1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$T(r,f^{n+1}) \leq 2T(r,f) + T(r,g) - \log r + O(1).$$

Mais d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f^{n+1}) = (n+1)T(r, f) + O(1)$ et puisque $f^{n+1} = g^{n+1} + c$, on déduit que $T(r, f) = T(r, g) + 0(1)$. Donc, l'inégalité ci-dessus se réduit à

$$(n+1)T(r, f) \leq 3T(r, f) - \log r + O(1),$$

une contradiction quand $n \geq 11$ et r tends vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$. Par conséquent $c = 0$ et donc, $f^{n+1} = g^{n+1}$. Ainsi, on voit qu'il existe $d \in \mathbb{K}$ tel que $d^{n+1} = 1$ et $f = dg$.

Cas 3.

Supposons (iii) du Lemme 4.2.2, c'est-à-dire que $F'G' = 1$. Alors $a^{-2} f^n f' g^n g' = 1$.

Soit b une $(n+1)$-ième racine de a^{-1}. Posons $\check{f} = bf$ et $\check{g} = bg$. Donc $\check{f}^n \check{f}' \check{g}^n \check{g}' = 1$, une contradiction d'après le Lemme 4.2.3 car $n \geq 11$. □

4.2.2 Fonctions analytiques qui partagent une valeur IM.

Nous allons maintenant étudier des problèmes d'unicité de fonctions analytiques de la forme $f^n f'$ et $g^n g'$ qui partagent une valeur finie, mais, ici, en ignorant les multiplicités. Pour cela, on considère la définition donnée dans la sous-section précédente ainsi que les travaux de Y. Xu et H. Qu $\big($voir [57]$\big)$.

Dans le cas classique, Y. Xu et H. Qu ont montré que :

Si f et g sont des fonctions entières non constantes telles que $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent une valeur finie non nulle $a \in \mathbb{C}$ quand $n \geq 12$, alors ou bien $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$, ou bien $f(z) = c_1 e^{-cz}$ et $g(z) = c_2 e^{-cz}$ où c, c_1 et c_2 sont des constants qui satisfont $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.

Ici, on montrera un résultat analogue qui est plus précis que le précédent et qui exclut évidemment la deuxième conclusion.

Notations. D'abord on doit rappeler la notation suivante, bien connu en analyse complexe [35] et analyse ultramétrique [39].

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ et soit $a \in \mathbb{K}$, telles que f et $f - a$ n'ont pas ni zéro ni pôle en 0. On définit

$$\Theta(a, f) := 1 - \limsup_{r \to +\infty} \frac{\overline{Z}(r, f-a)}{T(r, f)} \qquad \Big(\text{resp. } \Theta(a, f) := 1 - \limsup_{r \to R^-} \frac{\overline{Z}(r, f-a)}{T(r, f)}\Big).$$

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ non constantes telles que f et g partagent la valeur 1 I. M. Supposons que $f-1$ et $g-1$ n'ont ni zéros ni pôles en 0. On note $\overline{Z}_c(r, f-1, g-1)$ la fonction de comptage des zéros γ communs de $f-1$ et $g-1$ quand $\omega_\gamma(f-1) > \omega_\gamma(g-1)$, étant compté sans multiplicité. D'autre part, on note $Z_{11}(r, f-1, g-1)$ la fonction de comptage des zéros simples communs de $f-1$ et $g-1$.

Lemme 4.2.4. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non affines $\big($resp. $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))\big)$ n'ayant zéro en 0, et telles que* $\liminf\limits_{r\to+\infty} \big[T(r,f) - 9\overline{Z}(r,f)\big] > -\infty$ *et* $\liminf\limits_{r\to+\infty} \big[T(r,g) - 9\overline{Z}(r,g)\big] > -\infty$ $\Big($*resp. telles que* $f', g' \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$, $\Theta(0,f) > \dfrac{8}{9}$ *et* $\Theta(0,g) > \dfrac{8}{9}\Big)$. *Si f' et g' partagent la valeur 1 I. M., alors $f = g$.*

Démonstration. — Posons $\widetilde{\Psi} = \dfrac{f'''}{f''} - 2\dfrac{f''}{f'-1} - \dfrac{g'''}{g''} + 2\dfrac{g''}{g'-1}$. Clairement $\widetilde{\Psi}$ peut être écrite sous la forme $\dfrac{\widetilde{\psi}'}{\widetilde{\psi}}$ où $\widetilde{\psi} = \Big(\dfrac{f''}{(f'-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(g'-1)^2}{g''}\Big)$.

Supposons $\widetilde{\Psi} \neq 0$. Puisque $\widetilde{\Psi}$ est de la forme $\dfrac{\widetilde{\psi}'}{\widetilde{\psi}}$ d'après le Corollaire 2.1.5.2, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a $Z(r, \widetilde{\Psi}) \leq N(r, \widetilde{\Psi}) + 0(1)$. Mais, si γ est un zéro simple commun à $f'-1$ et $g'-1$, alors d'après le Lemme 4.2.1, γ est un zéro de $\widetilde{\Psi}$. Donc $Z_{11}(r, f'-1, g'-1) \leq Z(r, \widetilde{\Psi})$. Ainsi, on en déduit que

$$Z_{11}(r, f'-1, g'-1) \leq N(r, \widetilde{\Psi}) + O(1).$$

Mais remarquons que, d'après la définition de $\widetilde{\Psi}$, les pôles de $\widetilde{\Psi}$ sont trouvés uniquement parmi les zéros de f'' et g'' et parmi les zéros de $f'-1$ et $g'-1$ qui n'ont pas la même multiplicité. Donc,
$N(r, \widetilde{\Psi}) \leq \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + \overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) + \overline{Z}_c(r, g'-1, f'-1) +$
$+\ Z\big(r, f'' : f'(x) \neq 1, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) + Z\big(r, g'' : g'(x) \neq 1, (g(x), g'(x)) \neq (0,0)\big)$.

Par conséquent, en considérant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{11}(r, f'-1, g'-1) \leq\ & \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + \overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) + \overline{Z}_c(r, g'-1, f'-1) + \\ & + Z\big(r, f'' : f'(x) \neq 1, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) + \\ & + Z\big(r, g'' : g'(x) \neq 1, (g(x), g'(x)) \neq (0,0)\big) + O(1). \end{aligned} \tag{4.25}$$

D'autre part, d'après le Théorème 2.2.2, on a

$$T(r,f) + T(r,g) \leq 2\overline{Z}(r,f) + 2\overline{Z}(r,g) - \ Z\big(r, f'' : f'(x) \neq 1, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) + \tag{4.26}$$

$$+\ \overline{Z}(r, f'-1) + \overline{Z}(r, g'-1) - Z\big(r, g'' : g'(x) \neq 1, (g(x), g'(x)) \neq (0,0)\big) - 2\log r + O(1).$$

Remarquons aussi que

$$\overline{Z}(r, f'-1) + \overline{Z}(r, g'-1) \leq Z_{11}(r, f'-1, g'-1) + \overline{Z}(r, f'-1) + Z(r, g'-1).$$

Mais $g'-1 \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g'-1 \in \mathcal{A}(d(0, R^-))\big)$ donc, d'après les Corollaires 2.1.7.1 et 2.2.1.1, on en déduit que $Z(r, g'-1) = T(r, g'-1) + O(1) \leq T(r, g) + O(1)$. Ainsi, on obtient

$$\overline{Z}(r, f'-1) + \overline{Z}(r, g'-1) \leq Z_{11}(r, f'-1, g'-1) + \overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) + T(r, g) + O(1)$$

et, d'après (4.26), on a

$$T(r,f) + T(r,g) \leq 2\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) - Z\big(r, f'' : f'(x) \neq 1, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) + \\ + 2\overline{Z}(r,g) + Z_{11}(r, f'-1, g'-1) - Z\big(r, g'' : g'(x) \neq 1, (g(x), g'(x)) \neq (0,0)\big) + T(r,g) - 2\log r + \\ + O(1),$$

c'est-à-dire que

$$T(r,f) \leq 2\overline{Z}(r,f) + 2\overline{Z}(r,g) + Z_{11}(r, f'-1, g'-1) - Z\big(r, f'' : f'(x) \neq 1, (f(x), f'(x)) \neq (0,0)\big) \\ + \overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) - Z\big(r, g'' : g'(x) \neq 1, (g(x), g'(x)) \neq (0,0)\big) - 2\log r + O(1).$$

Ainsi, en considérant (4.25) dans l'inégalité de ci-dessus, on obtient

$$T(r,f) \leq 3\overline{Z}(r,f) + 3\overline{Z}(r,g) + 2\overline{Z}_L(r, f'-1) + \overline{Z}_L(r, g'-1) - 2\log r + 0(1). \tag{4.27}$$

Par ailleurs, d'après les Lemmes 4.2.2 et 4.3.1, on sait que

$$\overline{Z}_c(r, f'-1, g'-1) \leq \overline{Z}(r, f'-1) \leq \overline{Z}(r,f) - \log r + O(1).$$

Donc, d'après (4.27), on obtient

$$T(r,f) \leq 5\overline{Z}(r,f) + 4\overline{Z}(r,g) - 3\log r + O(1). \tag{4.28}$$

Avec une procédé analogue pour g, on en déduit aussi que

$$T(r,g) \leq 5\overline{Z}(r,g) + 4\overline{Z}(r,f) - 3\log r + O(1). \tag{4.29}$$

Supposons d'abord que $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Alors, d'après (4.28) et (4.29), on en déduit que

$$\liminf_{r \to +\infty} \Big[T(r,f) - 9\overline{Z}(r,f)\Big] = -\infty \qquad \text{et} \qquad \liminf_{r \to +\infty} \big[T(r,g) - 9\overline{Z}(r,g)\big] = -\infty,$$

une contradiction à l'hypothèse.

Supposons maintenant $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$. Puisque, d'après (4.28) et (4.29), on a

$$\big[T(r,f) - 9\overline{Z}(r,f) + T(r,g) - 9\overline{Z}(r,g)\big] \leq -6\log r + O(1),$$

on en déduit que

$$\limsup_{r\to R^-} \Big[T(r,f)\Big(1 - 9\frac{\overline{Z}(r,f)}{T(r,f)}\Big) + T(r,g)\Big(1 - 9\frac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)}\Big)\Big] < +\infty. \tag{4.30}$$

Mais, d'après l'hypothèse, on a $\Theta(0,f) > \dfrac{8}{9}$ et $\Theta(0,g) > \dfrac{8}{9}$ donc, il existe $\delta > 0$ et $\rho \in]0,R[$ tels que $1 - 9\dfrac{\overline{Z}(r,f)}{T(r,f)} \geq \delta$ $\forall r \in [\rho, R[$ et $1 - 9\dfrac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)} \geq \delta$ $\forall r \in [\rho, R[$. Ainsi $\displaystyle\lim_{r\to R^-} T(r,f)\Big(1 - 9\frac{\overline{Z}(r,f)}{T(r,f)}\Big) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{r\to R^-} T(r,g)\Big(1 - 9\frac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)}\Big) = +\infty$, une contradiction à (4.30). Par conséquent $\widetilde{\Psi} = 0$ quand $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. quand $f, g \in \mathcal{A}(d(0,R^-))\big)$.

Remarquons que, comme $\widetilde{\Psi}$ est de la forme $\dfrac{\widetilde{\psi}'}{\widetilde{\psi}}$ où $\widetilde{\psi} = \Big(\dfrac{f''}{(f'-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(g'-1)^2}{g''}\Big)$, quand $\widetilde{\Psi} = 0$, il existe $c, d \in \mathbb{K}$ tels que

$$\frac{1}{f'-1} = \frac{dg' + c - d}{g'-1}, \tag{4.31}$$

où $dg'(x) \neq d - c$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0,R^-)\big)$.

Considérons les 3 cas suivants :

Cas 1. $d \neq 0$, $c \neq d$.

Supposons $d \neq 0$ et $c \neq d$. D'après (4.31), il est clair que $g' + \dfrac{c-d}{d} \neq 0$.

En appliquant le Théorème 2.2.2 à g, on a

$$\begin{aligned} T(r,g) &\leq 2\overline{Z}(r,g) + \overline{Z}\Big(r, g' + \frac{c-d}{d}\Big) - \log r + O(1) \\ &= 2\overline{Z}(r,g) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Si $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, d'après l'inégalité précédente, on obtient une contradiction quand r tend vers $+\infty$ parce que comme g est non-affine, on a $\displaystyle\liminf_{r\to+\infty} \Big(T(r,g) - 2\overline{Z}(r,g)\Big) \leq -\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. De même, si $g \in \mathcal{A}(d(0,R^-))$, on obtient aussi une contradiction parce que d'après l'inégalité précédente, on a $\frac{1}{2} + O(1) \le \frac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)}$, ce qui contredit l'hypothèse quand r tend vers R^-.

Cas 2. $d \neq 0,\ c = d.$

Supposons $d \neq 0$ et $c = d$. Il est clair, d'après (4.31), que $f' = 1 + \frac{1}{d} - \frac{1}{dg'}$ où $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad \big(\text{resp. } \forall x \in d(0,R^-)\big)$.

Supposons $d = -1$. Donc $f'g' = 1$ et alors f' et g' sont des constantes. Par conséquent $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$, une contradiction car f et g sont non affines $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$. Supposons maintenant $d \neq -1$. Donc $f' - (1 + \frac{1}{d}) = -\frac{1}{dg'} \neq 0$.

En appliquant le Théorème 2.2.2 à f, on a

$$\begin{aligned} T(r,f) &\le 2\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}\Big(r, f' - \Big(1 + \frac{1}{d}\Big)\Big) - \log r + O(1) \\ &= 2\overline{Z}(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Par conséquent, comme dans le *Cas 1*, on obtient une contradiction de nouveau.

Cas 3. $d = 0,\ c \neq d.$

Supposons $d = 0$ et $c \neq d$. D'après (4.31), il existe $c_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f = \frac{g}{c} + L(x)$, où $L(x) = \Big(1 - \frac{1}{c}\Big)x + c_0$.

Supposons $L(x) = 0$. Donc $f = \frac{g}{c}$, ce qui entraîne $f' = \frac{g'}{c}$. Puisque $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sont non affines $\big($resp. d'après l'hypothès $f', g' \in \mathcal{A}_u(d(0,R^-))$), on voit que $f', g' \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sont non constantes et donc, elles n'ont pas de valeurs exceptionnelles. Par conséquent, il existe au moins une valeur $\gamma \in \mathbb{K}$ telle que $f'(\gamma) = 1$. Mais, comme f' et g' partagent la valeur 1 I. M., on sait aussi que $g'(\gamma) = 1$. Donc, on voit que $c = 1$. Ainsi $f = g$.

Supposons maintenant $L(x) \neq 0$. Clairement $L(x) \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$. Donc, en appliquant le Théorème 2.3.5 à f, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a

$$T(r,f) \le \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}\big(r, f - L(x)\big) + 3\log r + O(1),$$

c'est-à-dire que

$$T(r,f) \le \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + 3\log r + O(1) \tag{4.32}$$

Supposons d'abord $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$. D'après l'inégalié précédente, on a

$$T(r,f) \leq T(r,f)\Big[1 - \Big(1 - \frac{\overline{Z}(r,f)}{T(r,f)}\Big)\Big] + T(r,g)\Big[1 - \Big(1 - \frac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)}\Big)\Big] + 3\log r + O(1).$$

Mais, comme $f, g \in \mathcal{M}_u(d(0, R^-))$ et que f est de la forme $\dfrac{g}{c} + L(x)$, on déduit que $T(r,g) \leq T(r,f) + O(1)$. Donc,

$$\Big(1 - \frac{\overline{Z}(r,f)}{T(r,f)}\Big) + \Big(1 - \frac{\overline{Z}(r,g)}{T(r,g)}\Big) - 1 \leq \frac{3\log r + O(1)}{T(r,f)}.$$

Par conséquent, puisque $f \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$, on voit que $\Theta(0,f) + \Theta(0,g) \leq 1$, une contradiction puisque $\Theta(0,f) > \dfrac{8}{9}$ et $\Theta(0,g) > \dfrac{8}{9}$.

Supposons maintenant $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. D'après l'hypothèse, on voit qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $T(r,f) \geq 9\overline{Z}(r,f) - \eta$ et $T(r,g) \geq 9\overline{Z}(r,g) - \eta$. De plus, puisque $T(r,g) \leq T(r,f) + O(1)$, il vient

$$T(r,f) > \frac{1}{3}\Big(T(r,f) + T(r,g)\Big) > 3\Big(\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g)\Big) - \frac{2\eta}{3}. \tag{4.33}$$

Donc, d'après (4.32) et (4.33), on obtient

$$3\big(\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g)\big) - \frac{2\eta}{3} < \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + 4\log r + O(1),$$

ce qui entraîne

$$\overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) < 2\log r + O(1),$$

une contradiction car $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sont non affines. $\square$

Théorème 4.2.8. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ et soient $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et n un entier ≥ 8 $\big($resp. $\geq 9\big)$. Si $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a I. M., alors $f = dg$ où $d^{n+1} = 1$.*

Démonstration. — Posons $F = \dfrac{f^{n+1}}{a(n+1)}$ et $G = \dfrac{g^{n+1}}{a(n+1)}$. Il est clair que $F, G \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sont des fonctions non affines $\big($resp. comme F et G dépendent seulement de f et g, les fonctions $F, G, F', G' \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$. De plus, puisque $f^n f'$ et $g^n g'$ partagent la valeur a I. M., on en déduit que F' et G' partagent la valeur 1 I. M.

Sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$. Remarquons que chaque zéro de F et G a un ordre de multiplicité $\geq n + 1$. Donc

$$(n+1)\overline{Z}(r,F) \leq T(r,F) \quad \text{et} \quad (n+1)\overline{Z}(r,G) \leq T(r,G). \tag{4.34}$$

Supposons d'abord $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Puisque $n \geq 8$, d'après (4.34), on obtient

$$\liminf_{r\to+\infty} \big(T(r,F) - 9\overline{Z}(r,F)\big) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \liminf_{r\to+\infty} \big(T(r,G) - 9\overline{Z}(r,G)\big) \geq 0$$

respectivement. Alors F et G satisfont l'hypothèse du Lemma 4.2.4, ce qui entraîne $F = G$.

Supposons maintenant $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$. D'après (4.34), on a $\dfrac{\overline{Z}(r,F)}{T(r,F)} \leq \dfrac{1}{n+1}$, ce qui entraîne $\Theta(0,F) = 1 - \limsup\limits_{r\to R^-} \dfrac{\overline{Z}(r,F)}{T(r,F)} \geq \dfrac{n}{n+1}$. De même pour G, c'est-à-dire que $\Theta(0,G) \geq \dfrac{n}{n+1}$. Puisque $n \geq 9$, on obtient $\dfrac{n}{n+1} \geq \dfrac{9}{10} > \dfrac{8}{9}$ et donc $\Theta(0,F) > \dfrac{8}{9}$ et $\Theta(0,G) > \dfrac{8}{9}$. Par conséquent, d'après le Lemme 4.2.4, on a $F = G$ de nouveau.

Puisque $F = G$ quand $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. quand $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))\big)$, on a $f^{n+1} = g^{n+1}$. Donc, il existe $d \in \mathbb{K}$ tel que $f = dg$ et $d^{n+1} = 1$, ce qui achève la démonstration. $\square$

4.3 Unicité des fonctions méromorphes ultramétriques de la forme $P'(f)f'$

4.3.1 Unicité des fonctions méromorphes ultramétriques de la forme $P'(f)f'$ qui partagent une fonction

Comme dans la section précédente, on peut maintenant étudier l'unicité des fonctions du type $P'(f)f'$ où $P \in \mathbb{K}[x]$, et obtenir des conclusions concernant des fonctions qui partagent non plus une valeur constante mais une certaine fonction méromorphe. La définition suivante généralise la définition déjà vu dans la Section 4.2.

Définition. Soient $f, g, \alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g, \alpha \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$. On dira que f et g *partagent la fonction α en comptant les multiplicités* (C. M.), si les fonctions $f - \alpha$ et $g - \alpha$ ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-)\big)$. Évidemment, si $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}(d(\theta, R^-))\big)$ est une constante, on retrouve la définition donnée dans la Section 4.2.

Le problème qu'on étudiera ici est le suivant :

Problème.

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathcal{M}_f(d(\theta, R^-)) \cap \mathcal{M}_g(d(\theta, R^-))\big)$ telle que $f^n(f-a)^k f'$ et $g^n(g-a)^k g'$ partagent la fonction α en prenant en compte les multiplicités. Peut-on conclure que $f = g$?

La question ci-dessus a été déjà étudiée dans $\mathbb{C}$ dans plusieurs articles, par exemple [29], [41], [43], [48], en considérant des fonctions analytiques ou des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ et en obtenant diverses conclusions. Dans $\mathbb{K}$, ce problème est très lié à la recherche de polynômes d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}(d(\theta, R^-))$. Ici, on obtient des conclusions qui sont, d'une certaine façon, un peu plus fines grâce aux propriétés spécifiques des fonctions ultramétriques. Pour obtenir ces conclusions, on utilisera de nouveau la théorie de Nevanlinna et d'autres techniques plus ou moins différentes de celles utilisées précédemment.

Pour démontrer notre premier théorème on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$. Soient $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k+2$ $\big($resp. $n \geq k+3\big)$. Soit*

$$P(x) = \frac{1}{n+k+1}x^{n+k+1} - \binom{k}{1}\frac{a}{n+k}x^{n+k} + \ldots + \binom{k}{k-1}\frac{(-a)^{k-1}}{n+2}x^{n+2} + \frac{(-a)^k}{n+1}x^{n+1} \tag{4.35}$$

un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $P'(f)f' = P'(g)g'$, alors $P(f) = P(g)$.

Démonstration. — On voit que $P(x)$ peut être écrit sous la forme $x^{n+1}Q(x)$ où $Q \in \mathbb{K}[x]$ et $\deg(Q) = k$. De plus, puisque $P'(f)f' = P'(g)g'$, on a $P(f) - P(g) = c$ où $c \in \mathbb{K}$.

Sans perte de généralité, on suppose $\theta = 0$. Supposons $c \neq 0$. Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à $P(f)$, on obtient

$$T\big(r, P(f)\big) \leq \overline{Z}\big(r, P(f)\big) + \overline{Z}\big(r, P(f) - c\big) + \overline{N}\big(r, P(f)\big) - \log r + O(1). \tag{4.36}$$

Remarquons que $\overline{Z}\big(r, P(f)\big) \leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}\big(r, Q(f)\big) \leq T(r, f) + T\big(r, Q(f)\big)$ mais, d'après le Théorème 2.3.1, $T\big(r, Q(f)\big) = kT(r, f) + O(1)$ et donc,

$$\overline{Z}\big(r, P(f)\big) \leq (k+1)T(r, f) + O(1).$$

De même, comme $\overline{Z}\big(r, P(f) - c\big) \leq \overline{Z}(r, g) + \overline{Z}(r, Q(g)) \leq T(r, g) + T(r, Q(g))$. On en déduit que

$$\overline{Z}\big(r, P(f) - c\big) \leq (k+1)T(r, g) + O(1).$$

De plus, puisque $\overline{N}\big(r, P(f)\big) = \overline{N}(r, f)$, on a

$$\overline{N}\big(r, P(f)\big) \leq T(r, f) + O(1).$$

Par conséquent, en considérant les inégalités précédentes dans (4.36), on obtient

$$T\big(r, P(f)\big) \leq (k+2)T(r, f) + (k+1)T(r, g) - \log r + O(1).$$

Mais, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T\big(r, P(f)\big) = (n+k+1)T(r, f) + O(1)$. Donc, on a

$$nT(r, f) \leq T(r, f) + (k+1)T(r, g) - \log r + O(1). \tag{4.37}$$

Puisque $P(g)$ satisfait les mêmes hypothèses que $P(f)$, avec un procédé analogue, on a

$$nT(r, g) \leq T(r, g) + (k+1)T(r, f) - \log r + O(1). \tag{4.38}$$

Par conséquent, d'après (4.37) et (4.38), on obtient

$$n\big[T(r, f) + T(r, g)\big] \leq (k+2)\big[T(r, f) + T(r, g)\big] - 2\log r + O(1),$$

une contradiction quand $n \geq k+2$ et r tend vers $+\infty$ car $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ sont transcendantes $\big($resp. quand $n > k+2$ et r tend vers R^- car $T(r, f)$ et $T(r, g)$ sont non-bornées dans $]0, R^-[\big)$. Ainsi $c = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 4.3.2. *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que* $\deg(P) = q \geq 2$. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non constante* $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ *et soient* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-))\big)$. *Si $P(f+\alpha_1) - P(f) = \alpha_2$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on assume $\theta = 0$. Supposons $\alpha_1 \neq 0$. Posons $P(x+\alpha_1) - P(x) = Q(x)$ où $Q \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})[x]$ $\big($resp. $Q \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-))[x]\big)$ et $\deg(Q) = q-1$.

D'après le Théorème 2.3.1, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$T\big(r, P(f+\alpha_1) - P(f)\big) = (q-1)T(r, f) + S_f(r).$$

Mais, d'après l'hypothèse, on déduit que $T\big(r, P(f+\alpha_1) - P(f)\big)$ est de la forme $S_f(r)$, ce qui entraîne que $T(r, f)$ est aussi de la forme $S_f(r)$ ce qui est impossible. Par conséquent $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$. □

Lemme 4.3.3. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendantes* $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))\big)$ *et soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que* $\deg(P) = q \geq 2$. *Si $P'(f)f' = P'(g)g'$, alors $P(f) = P(g)$.*

Démonstration. — Supposons que $P'(f)f' = P'(g)g'$. Alors $P(f) - P(g)$ est égal à une constante c. Posons $P(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n x^n$. Donc $\sum_{n=0}^{q} a_n(f^n - g^n) = c$.

Supposons $c \neq 0$. Pour tout $n = 1, ..., q-1$, posons $H_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-j}$. Alors $x^n - y^n = (x-y)H_n(x,y)$ d'où $P(f) - P(g) = (f-g)\sum_{n=0}^{q-1} H_n(f,g) = c$.

Remarquons que $f-g$ est une constante $\big($resp. $f - g \in \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))\big)$ car si $f-g$ n'est pas constante $\big($resp. $f - g \notin \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))\big)$, d'après le Corollaire 1.5.6.1 $\big($resp. Corollaire 1.5.6.2$\big)$, la fonction $(f-g)\sum_{n=0}^{q-1} H_n(f,g)$ est non constante $\Big($resp. $(f-g)\sum_{n=0}^{q-1} H_n(f,g) \notin \mathcal{A}_b(d(\theta, R^-))\Big)$, une contradiction.

Posons $b = f - g$. Alors $P(f) - P(f-b) = c$. Par conséquent, d'après le Lemme 4.3.2, $b = c = 0$ et donc $P(f) = P(g)$ ce qui achève la démonstration. □

Théorème 4.3.1. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ transcendantes et soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\big)$. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soient $n, k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n + k \geq 6$ $\big($resp. $n + k \geq 5\big)$. Si $f^n(f-a)^k f'$ et $g^n(g-a)^k g'$ partagent la fonction α C. M., alors $f = g$.*

Démonstration. — Comme $f^n(f-a)^k f'$ et $g^n(g-a)^k g'$ sont des fonctions entières qui partagent la fonction α C. M., on déduit que la fonction $\dfrac{f^n(f-a)^k f' - \alpha}{g^n(g-a)^k g' - \alpha}$ est une fonction méromorphe sans zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$. Donc, d'après le Corollaire 1.7.4.1, f est égale à une constante $c \in \mathbb{K}$ non nulle.

Supposons $c \neq 1$. En posant $F = f^n(f-a)^k f'$, on obtient

$$F = c\big(g^n(g-a)^k g'\big) + \alpha(1-c). \tag{4.39}$$

Clairement $\alpha(1-c) \in \mathcal{A}_f(\mathbb{K})$ et d'après le Corollaire 2.3.3.2, on en déduit aussi que $\alpha(1-c) \in \mathcal{A}_F(\mathbb{K})$. Donc, en appliquant le Théorème 2.3.5 à F, on a

$$T(r,F) \leq \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}\big(r, F - \alpha(1-c)\big) + S_F(r), \quad r \in]0, +\infty[. \tag{4.40}$$

De plus, d'après le Lemme 2.2.1, on a

$$\overline{Z}(r,F) = \overline{Z}(r,f^n) + \overline{Z}\big(r,(f-a)^k\big) + \overline{Z}(r,f') \leq 2T(r,f) + T(r,f') + O(1)$$

et

$$\overline{Z}\big(r, F - \alpha(1-c)\big) = \overline{Z}(r, g^n) + \overline{Z}(r, g-a) + \overline{Z}(r, g') \leq T(r,g) + T(r,g') + O(1).$$

De même comme $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a

$$T(r,F) = nT(r,f) + kT(r,f-a) + T(r,f') + O(1) = (n+k)T(r,f) + T(r,f').$$

Alors, en considérant les inégalités précédentes dans (4.40), on obtient

$$(n+k)T(r,f) \leq 2\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + T(r,g') + S_f(r). \tag{4.41}$$

Comme g satisfait les mêmes hypothèses que f, avec un procédé analogue, on obtient

$$(n+k)T(r,g) \leq 2\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + T(r,f') + S_g(r). \tag{4.42}$$

Par conséquent, d'après (4.41) et (4.42), on obtient

$$(n+k)\big[T(r,f) + T(r,g)\big] \leq 4\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + \big[T(r,f') + T(r,g')\big] + S_f(r) + S_g(r).$$

Puisque, d'après le Corollaire 2.2.1.1, $T(r,f') + T(r,g') \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)$, on obtient

$$(n+k)\big[T(r,f) + T(r,g)\big] \leq 5\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + S_f(r) + S_g(r),$$

d'où $n+k \leq 5$ quand r tend vers $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $c = 1$ et donc, d'après (4.39), on a $f^n(f-a)^k f' = g^n(g-a)^k g'$.

Posons maintenant

$$P(x) = \frac{1}{n+k+1}x^{n+k+1} - \binom{k}{1}\frac{a}{n+k}x^{n+k} + \ldots + \frac{(-a)^k}{n+1}x^{n+1}.$$

Puisque $P'(f)f' = P'(g)g'$ et $\deg(P) = n+k+1 > 2$, d'après le Lemme 4.3.3, on a $P(f) = P(g)$. Mais, d'après le Théorème 4.1.1, P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ quels que soit n et k dans $\mathbb{N}$, donc $f = g$.

Maintenant supposons $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. L'application du Théorème 2.2.4 à F, permet de remplacer $S_f(r)$ et $S_g(r)$ par $-\log r + O(1)$ dans (4.41) et (4.42). Par conséquent, on obtient

$$(n+k)\big[T(r,f) + T(r,g)\big] \leq 5\big[T(r,f) + T(r,g)\big] - 2\log r + O(1),$$

d'où $n+k \leq 4$ quand r tend vers $+\infty$, ce qui contredit de nouveau l'hypothèse. Par conséquent $P'(f)f' = P'(g)g'$. La conclusion est obtenue d'après le Lemme 4.3.3 et le Théorème 4.1.1. $\square$

Théorème 4.3.2. *Soient $f, g \in \mathcal{A}_u(d(\theta, R^-))$ et soit $\alpha \in \mathcal{A}_f(d(\theta, R^-)) \cap \mathcal{A}_g(d(\theta, R^-))$. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soit n un entier ≥ 4. Si $f^n(f-a)^2 f'$ et $g^n(g-a)^2 g'$ partagent la fonction α C. M., alors $f = g$. De même, si $f^n(f-a)f'$ et $g^n(g-a)g'$ partagent la fonction α quand $n \geq 5$, alors $f = g$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, supposons $\theta = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^n(f-a)^k f'$ et $g^n(g-a)^k g'$ partagent la fonction α C. M..

La fonction $\dfrac{f^n(f-a)^k f' - \alpha}{g^n(g-a)^k g' - \alpha} = u(x)$ est une fonction méromorphe sans zéros ni pôles dans $d(0, R^-)$ et donc, $u(x) \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$. Supposons $u \neq 1$. Alors,

$$f^n(f-a)^k f' = u\big(g^n(g-a)^k g'\big) + \alpha(1-u).$$

Puisque $f, g \in \mathcal{A}_u(d(0, R^-))$, il est clair que $u(x) \in \mathcal{A}_f(d(0, R^-)) \cap \mathcal{A}_g(d(0, R^-))$ et donc, d'après le Corollaire 2.3.3.2, $\alpha(1-u)$ est aussi une petite fonction par rapport à $f^n(f-a)^k f'$. Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.3.5 à $f^n(f-a)^k f'$, pour $r \in]0, R[$, on obtient

$$T(r, f^n(f-a)^k f') \leq \overline{Z}(r, f^n(f-a)^k f') + \overline{Z}\big(r, f^n(f-a)^k f' - \alpha(1-u)\big) + S_F(r). \quad (4.43)$$

Comme on a pu le constater dans la démonstration du théorème précédent, puisque $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$, on a $T\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) = (n+k)T(r, f) + T(r, f') + O(1)$. De plus,
$\overline{Z}(r, f^n(f-a)^k f') \leq 2T(r, f) + T(r, f') + O(1)$ et
$\overline{Z}\big(r, f^n(f-a)^k f' - \alpha(1-u)\big) \leq 2T(r, g) + T(r, g') + O(1)$

Par conséquent, le même raisonnement utilisé dans le Théorème 4.3.1 permet conclure que

$$(n+k)T(r, f) + T(r, f') \leq 2T(r, f) + T(r, f') + 2T(r, g) + T(r, g) + S_f(r)$$

et de même

$$(n+k)T(r, g) + T(r, g') \leq 2T(r, g) + T(r, g') + 2T(r, f) + T(r, f) + S_g(r)$$

d'où

$$(n+k)\Big[T(r, f) + T(r, g)\Big] \leq 4\Big[T(r, f) + T(r, g)\Big] + \Big[T(r, f') + T(r, g')\Big] + S_f(r) + S_f(g),$$

ce qui entraîne

$$(n+k-5)\Big[T(r, f) + T(r, g)\Big] \leq S_f(r) + S_f(g).$$

Par conséquent, quand r tend vers R^-, $n + k \leq 5$, ce qui contredit l'hypothèse si on prend $k = 1$ ou $k = 2$. Alors la fonction $u(x) \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$ est une constante égale à 1 dans ces deux cas et donc, on en déduit que $f^n(f-a)^k f' = g^n(g-a)^k g'$.

Supposons d'abord $k=1$ et posons $P(x)=\dfrac{1}{n+2}x^{n+2}+\dfrac{a}{n+1}x^{n+1}$. Comme $f^n(f-a)f'=g^n(g-a)g'$, c'est-à-dire que $P'(f)f'=P'(g)g'$, d'après le Lemme 4.3.3, on a $P(f)=P(g)$. Mais, comme on l'a montré dans le Théorème 4.1.2, le polynôme P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}_u(d(0,R^-))$. Par conséquent $f=g$.

Supposons maintenant $k=2$ et posons $Q(x)=\dfrac{1}{n+3}x^{n+3}+\dfrac{2a}{n+2}x^{n+2}+\dfrac{a^2}{n+1}x^{n+1}$. Puisque $f^n(f-a)^2f'=g^n(g-a)^2g'$, d'après le Lemme 4.3.3, on a $Q(f)=Q(g)$ et comme, d'après le Théorème 4.1.3, le polynôme Q est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{A}_u(d(0,R^-))$, on conclut que $f=g$ de nouveau, ce qui achève la démonstration. $\square$

Les Lemmes suivants 4.3.4, 4.3.5 et 4.3.6, nous permettront d'établir des théorèmes analogues aux Théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 mais cette fois en considérant des fonctions méromorphes.

Lemme 4.3.4. *Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f\in\mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ telle que $f(0)\neq 0,\infty$. Alors,*

$$2\overline{Z}(r,f)-Z_1(r,f)\leq Z(r,f)\qquad \forall r>0\ \ \big(\text{resp. } \forall r\in]0,R[\big).$$

Démonstration. — Soit $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$. Soient $\beta_1,\beta_2,...,\beta_l$ les zéros simples de f dans $d(0,r)$, soient $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ les zéros d'ordre 2 de f dans $d(0,r)$ et soient $\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n$ les zéros d'ordre ≥ 3 de f dans $d(0,r)$.

Notons $\overline{Z}_2(r,f)$ et $\overline{Z}_{(\geq 3}(r,f)$ les fonctions de comptage des zéros d'ordre 2 et ≥ 3 de f dans $d(0,r)$ en ignorant les multiplicités. Donc $\overline{Z}(r,f)=Z_1(r,f)+\overline{Z}_2(r,f)+\overline{Z}_{(\geq 3}(r,f)$ et

$$Z_1(r,f)+\overline{Z}_2(r,f)+\overline{Z}_{\geq 3}(r,f)=\sum_{i=1}^{l}\log\frac{r}{|\beta_i|}+\sum_{j=1}^{m}\log\frac{r}{|\gamma_j|}+\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r}{|\zeta_k|}=\overline{Z}(r,f).$$

Mais,

$$2\overline{Z}(r,f)-Z_1(r,f)\leq 2\overline{Z}(r,f)+Z_{(\geq 3}(r,f)-Z_1(r,f)=Z_1+2\overline{Z}_2(r,f)+3\overline{Z}_{(\geq 3}(r,f)$$

et évidemment

$$Z_1(r,f)+2\overline{Z}_2(r,f)+3\overline{Z}_{(\geq 3}(r,f)\leq Z(r,f).$$

D'où la conclusion de la démonstration. $\square$

Lemme 4.3.5. *Soient $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante $\big($resp. $f,g\in\mathcal{M}_u(d(0,R^-))\big)$, n'ayant ni zéro ni pôle en 0 et partageant la valeur 1 C. M. Soit*

$$\Phi=\frac{f''}{f'}-2\frac{f'}{f-1}-\frac{g''}{g'}+2\frac{g'}{g-1}.\tag{4.44}$$

Si $\Phi=0$ et si $T(r,f)-\Big[\overline{Z}(r,f)+\overline{N}(r,f)+\max\big\{\overline{Z}(r,g),\ \overline{N}(r,g)\big\}\Big]$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, alors $f=g$ ou bien $fg=1$.

Démonstration. — Supposons $\Phi = 0$. Puisque $\Phi = \dfrac{\phi'}{\phi}$ où $\phi = \Big(\dfrac{f'}{(f-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(g-1)^2}{g'}\Big)$, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ où $a \neq 0$, tels que $\dfrac{1}{f-1} = \dfrac{a}{g-1} + b$, c'est-à-dire que f est de la forme

$$\frac{Ag+B}{Cg+D} \tag{4.45}$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{K}$.

Considérons les 3 cas suivants :

Cas 1. $A \neq 0$, $C = 0$.

Si $A \neq 0$ et $C = 0$, d'après (4.45), on a $f - \dfrac{B}{D} = \dfrac{A}{D}g$. Supposons $B \neq 0$. Donc $\overline{Z}\Big(r, F - \dfrac{B}{D}\Big) = \overline{Z}(r, G)$. En appliquant à f le Théorème 2.2.4, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on obtient

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}\Big(r, f - \frac{B}{D}\Big) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,g) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ &< \overline{Z}(r,f) + \overline{N}(r,f) + \max\Big\{\overline{Z}(r,g),\ \overline{N}(r,g)\Big\} + O(1), \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $B = 0$ et donc $f = \dfrac{A}{D}\,g$.

Supposons $\dfrac{A}{D} \neq 1$. Comme f et g partagent la valeur 1 C. M. et $f = \dfrac{A}{D}\,g$, on a $\big(f(x), g(x)\big) \neq (1,1)$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$, parce que si $f(x) = 1$, on a $g(x) = 1$ et donc, $\dfrac{A}{D} = 1$, une contradiction. Mais $g(x) = 1$ si et seulement si $f(x) = \dfrac{A}{D}$. Donc $f(x) \neq \dfrac{A}{D}$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$. Par conséquent, f a deux valeurs exceptionnelles. Donc, d'après le Corollaire 1.7.8.2, on en déduit que f est une constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))\big)$, ce qui contredit l'hypothèse de nouveau. Ainsi $\dfrac{A}{D} = 1$ et donc $f = g$.

Cas 2. $A = 0$, $C \neq 0$.

Si $A = 0$ et $C \neq 0$, d'après (4.45), on a $g = \dfrac{B}{Cf} - \dfrac{D}{C}$. Supposons $D \neq 0$. Alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on en déduit que $\overline{Z}\Big(r, \dfrac{1}{f} - \dfrac{D}{B}\Big) = \overline{Z}(r, g)$. Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.2.4 à $\dfrac{1}{f}$, on obtient

$$\begin{aligned} T\Big(r, \frac{1}{f}\Big) &\leq \overline{Z}\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + \overline{Z}\Big(r, \frac{1}{f} - \frac{D}{B}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f}\Big) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}(r, g) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \\ &< \overline{Z}(r, f) + \overline{N}(r, f) + \max\Big\{\overline{Z}(r, g),\ \overline{N}(r, g)\Big\} + O(1). \end{aligned}$$

Puisque $T\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big) = T(r, f) + O(1)$, l'inégalité précédente est équivalente à

$$T(r, f) < \overline{Z}(r, f) + \overline{N}(r, f) + \max\Big\{\overline{Z}(r, g),\ \overline{N}(r, g)\Big\} + O(1),$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $D = 0$ et $f = \dfrac{B}{C}\, g$.

Supposons maintenant $\dfrac{B}{C} \neq 1$. Avec un procédé analogue au cas precédént, on conclut que $f(x) \neq 1$ et $g(x) \neq 1$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$. De plus, $g(x) = 1$ si et seulement si $f(x) = \dfrac{B}{C}$. Alors, il est clair que $f(x) \neq \dfrac{B}{C}$ $\forall x \in \mathbb{K}$ $\big($resp. $\forall x \in d(0, R^-)\big)$. Donc, comme dans le cas precédént, f a deux valeurs exceptionnelles et donc, d'après le Corollaire 1.7.8.2, on en déduit que f est une constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))\big)$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $\dfrac{B}{C} = 1$ et $fg = 1$.

Cas 3. $AC \neq 0$.

D'après (4.45), on a $f - \dfrac{A}{C} = \dfrac{B - \frac{AD}{C}}{Cg + D}$ et donc, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, $\overline{Z}\Big(r, f - \dfrac{A}{C}\Big) = \overline{N}(r, g)$. En appliquant à f le Théorème 2.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{Z}(r, f) + \overline{Z}\Big(r, f - \frac{A}{C}\Big) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \\ &< \overline{Z}(r, f) + \overline{N}(r, f) + \max\Big\{\overline{Z}(r, g);\ \overline{N}(r, g)\Big\} + O(1), \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse de nouveau et achève la démonstration. □

Lemme 4.3.6. *Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(x)$ non nulle. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soient $n, k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n > 3k + 1$. Il n'existe pas de fonctions transcendantes $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. de fonctions $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ telles que*

$$f^n (f - a)^k f' g^n (g - a)^k g' = \mathcal{T}. \tag{4.46}$$

Démonstration. — Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}_u(d(\theta, R^-))\big)$ satisfaisant (4.46). Puisque $\mathcal{T}$ est une fonction rationnelle, il existe $\rho \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\rho \in]\theta, R[\big)$ telle que tous les zéros et tous les pôles de $\mathcal{T}$ soient à l'intérieur du disque $d(0, \rho)$ $\big($resp. $d(\theta, R^-)\big)$. Soit γ un zéro de g d'ordre s dans $\mathbb{K} \setminus d(0, \rho)$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-) \setminus d(\theta, \rho)\big)$. D'après (4.46), γ est un pôle de f d'ordre, par exemple, t dans $\mathbb{K} \setminus d(0, \rho)$ $\big($resp. dans $d(\theta, R^-) \setminus d(\theta, \rho)\big)$. Et, comme γ n'est ni zéro ni pôle de $\mathcal{T}$, on en déduit que

$$\omega_\gamma(g^n) + \omega_\gamma\big((g-a)^k\big) + \omega_\gamma(g') = \omega_\gamma(f^n) + \omega_\gamma\big((f-a)^k\big) + \omega_\gamma(f').$$

Comme $\omega_\gamma(g - a) = 0$, on obtient la relation suivante

$$ns + s - 1 = nt + kt + t + 1, \tag{4.47}$$

c'est-à-dire que $(s - t)(n + 1) = kt + 2$. Mais $kt + 2 > 0$ et $n + 1 > 0$, alors $s - t \geq 1$. Donc $kt + 2 \geq n + 1$, c'est-à-dire que $t \geq \dfrac{n-1}{k}$. En considérant cette inégalité dans (4.47), on obtient $s(n + 1) = t(n + k + 1) + 2 \geq \dfrac{n^2 - 1 + k(n+1)}{k} = \dfrac{(n+1)(n+k-1)}{k}$, c'est-à-dire que

$$s \geq \frac{n+k-1}{k}. \tag{4.48}$$

Supposons maintenant que γ est un zéro de $g - a$ d'ordre s dans $\mathbb{K} \setminus d(0, \rho)$ $\big($resp. dans $d(0, R^-) \setminus d(0, \rho)\big)$. Clairement γ n'est ni zéro ni pôle de $\mathcal{T}$, ni zéro de g non plus. Mais, il est un pôle de f d'ordre, par exemple, t. Donc, d'après (4.46), on en déduit que $ks + s - 1 = nt + kt + t + 1$, c'est-à-dire que $s(k + 1) = (n + k + 1)t + 2 \geq n + k + 3$ car $t \geq 1$. Par conséquent, on a

$$s \geq \frac{n+k+3}{k+1}. \tag{4.49}$$

Puisque chaque pôle de f à l'extérieur de $d(0, \rho)$ est ou bien un zéro de $g(g - a)$ ou bien un zéro de g', on voit que pour $r \in]\rho, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]\rho, R[\big)$, on a

$$\overline{N}(r, f) \leq \overline{Z}(r, g) + \overline{Z}(r, g - a) + \overline{Z}_0(r, g') + O(\log r).$$

Mais, d'après (4.48), chaque zéro de g a au moins un ordre de multiplicité $\dfrac{n+k-1}{k}$ et, d'après (4.49), chaque zéro de $g - a$ a au moins un ordre de multiplicité $\dfrac{n+k+3}{k+1}$. Ainsi, en considérant les inégalités précédentes, on obtient

$$\overline{N}(r, f) \leq \frac{k}{n+k-1} Z(r, g) + \frac{k+1}{n+k+3} Z(r, g - a) + Z_0(r, g') + O(\log r). \tag{4.50}$$

Puisque les fonctions f et g satisfont les mêmes propriétés, avec un procédé analogue au précédent, on déduit que les zéros de f et $f-a$ satisfont aussi (4.48) et (4.49) respectivement. Donc, en appliquant à f le Théorème 2.2.4 et en considérant (4.48), (4.49) et (4.50), on obtient

$$\begin{aligned}T(r,f) &\le \overline{Z}(r,f)+\overline{Z}(r,f-a)+\overline{N}(r,f)-\overline{Z}_0(r,f')-\log r+O(1)\\ &\le \frac{k}{n+k-1}Z(r,f)+\frac{k+1}{n+k+3}Z(r,f-a)+\frac{k}{n+k-1}Z(r,g)+\frac{k+1}{n+k+3}Z(r,g-a)+\\ &\quad + Z_0(r,g')-Z_0(r,f')+O(\log r).\end{aligned}$$

Comme

$$\max\big\{Z(r,f),Z(r,f-a)\big\}\le T(r,f)+O(1)\quad \text{et}\quad \max\big\{Z(r,g),Z(r,g-a)\big\}\le T(r,g)+O(1),$$

on en déduit que

$$T(r,f) \le \Big(\frac{k}{n+k-1}+\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,f)+\Big(\frac{k}{n+k-1}+\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,g)+\overline{Z}_0(r,g') - \\ -\overline{Z}_0(r,f')+O(\log r).$$

Par conséquent, on a

$$\Big(\frac{n-1}{n+k-1}-\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,f)\le\Big(\frac{k}{n+k-1}+\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,g)+\overline{Z}_0(r,g')-\overline{Z}_0(r,f')+O(\log r).$$

De même pour g, on a

$$\Big(\frac{n-1}{n+k-1}-\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,g)\le\Big(\frac{k}{n+k-1}+\frac{k+1}{n+k+3}\Big)T(r,f)+\overline{Z}_0(r,f')-\overline{Z}_0(r,g')+O(\log r).$$

En additionnant les inégalités précédentes, on obient

$$\frac{(n-k)^2-4\big(k+\frac{1}{2}\big)^2}{(n+k-1)(n+k+3)}\big[T(r,f)+T(r,g)\big]\le O(\log r),$$

une contradiction quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$ car $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ sont transcendantes $\big($resp. car $T(r,f)$ et $T(r,g)$ sont non-bornées dans $]0,R[\big)$ et $n>3k+1$. □

Théorème 4.3.3. *Soient $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes et soit $\alpha\in\mathbb{K}(x)$. Soit $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ et soient $n,k\in\mathbb{N}$ satisfaisant $k\ge 3$ et $n>\max\{3k+1,15-k\}$. Si $f^n(f-a)^kf'$ et $g^n(g-a)^kg'$ partagent la fonction α C. M., alors $f=g$.*

Démonstration. — Puisque $\alpha\in\mathbb{K}(x)$, il est clair que $\alpha\in\mathcal{M}_f(\mathbb{K})\cap\mathcal{M}_g(\mathbb{K})$. Écrivons α sous la forme $\dfrac{Q}{R}$ où $Q,R\in\mathbb{K}[x]$ sans zéros communs.

Posons

$$V(x) = \frac{1}{n+k+1}x^k - \binom{k}{1}\frac{a}{n+k}x^{k-1} + ... + \binom{k}{k-1}\frac{(-a)^{k-1}}{n+2}x + \frac{(-a)^k}{n+1}$$

et notons $P(x) = x^{n+1}V(x)$.

Posons maintenant $F = \dfrac{f^n(f-a)^k f'}{\alpha}$ et $G = \dfrac{g^n(g-a)^k g'}{\alpha}$. D'après l'hypothèse, on en déduit que F et G partagent la valeur 1 C. M et, de plus, on voit que $\big(P(f)\big)' = \alpha F$ et $\big(P(g)\big)' = \alpha G$ respectivement. Ainsi, d'après le Corollaire 2.2.1.2, on a

$$T\big(r, P(f)\big) \leq T(r,F) + Z\big(r, P(f)\big) - Z(r,F) + T(r,\alpha) + O(1), \quad r \in]0, +\infty[. \tag{4.51}$$

Remarquons que

$$nZ(r,f)+kZ(r,f-a)+Z(r,f')-\deg(Q)\log r \leq Z(r,F) \leq nZ(r,f)+kZ(r,f-a)+Z(r,f')+\deg(R)\log r$$

et $Z\big(r,P(f)\big) = (n+1)Z(r,f) + Z\big(r,V(f)\big)$. Donc,

$$Z\big(r,P(f)\big) - Z(r,F) \leq Z(r,f) + Z\big(r,V(f)\big) - kZ(r,f-a) - Z(r,f') + \deg(Q)\log r.$$

Par conséquent, puisque

$$T(r,\alpha) = \deg(\alpha)\log r + O(1) = \max\big\{\deg(Q), \deg(R)\big\}\log r + O(1),$$

on obtient d'après (4.51) que

$$T\big(r,P(f)\big) \leq T(r,F) + Z(r,f) + Z\big(r,V(f)\big) - kZ(r,f-a) - Z(r,f') + 2\deg(\alpha)\log r + O(1). \tag{4.52}$$

Par ailleurs, posons

$$\Phi = \frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} - \frac{G''}{G'} + 2\frac{G'}{G-1}. \tag{4.53}$$

Avec un simple calcul, on voit que Φ est de la forme $\dfrac{\phi'}{\phi}$ où $\phi = \Big(\dfrac{F'}{(F-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(G-1)^2}{G'}\Big)$. Supposons $\Phi \neq 0$. Puisque F et G partagent la valeur 1 C. M., on a

$$\overline{Z}(r,F-1) = \overline{Z}(r,G-1) = \overline{Z}_{2)}(r,G-1) + Z_1(r,F-1). \tag{4.54}$$

De plus, si γ est un zéro simple commun de $F-1$ et $G-1$, alors d'après le Lemme 4.2.1, γ est aussi un zéro de Φ. Donc $Z_1(r,F-1) = Z_1(r,G-1) \leq Z(r,\Phi)$. Comme Φ est une dérivée logarithmique, d'après le Corollaire 2.1.5.2, on a aussi que $Z(r,\Phi) \leq N(r,\Phi) - \log r + O(1)$. Alors, il est clair que

$$Z_1(r,F-1) \leq N(r,\Phi) - \log r + O(1).$$

Mais, comme $F-1$ et $G-1$ partagent les mêmes zéros, en prenant en compte les multiplicités, on voit que si γ est un zéro de $F-1$, il ne peut pas être un pôle de Φ. Par conséquent, d'après (4.53), les pôles de Φ sont uniquement les pôles multiples de F et G et, les zéros de F' et G', ce qui entraîne

$$\begin{aligned} N(r,\Phi) \le \overline{N}_{2)}(r,F) + \overline{N}_{2)}(r,G) + \overline{Z}_0\big(r,F' : F(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,F) \; + \\ + \; \overline{Z}_0\big(r,G' : G(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,G). \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant les deux dernières inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} Z_1(r,F-1) \le \overline{N}_{2)}(r,F) + \overline{N}_{2)}(r,G) + \overline{Z}_0\big(r,F' : F(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,F) \; + \\ + \; \overline{Z}_0\big(r,G' : G(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,G) - \log r + O(1). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Mais, d'après la définition, $Z_0\big(r,G' : G(x)\neq 0, G(x)\neq 1\big)$ correspond à la fonction de comptage des zéros multiples de G' qui ne sont pas zéros de G ni zéros de $G-1$. Donc, on en déduit que

$$\overline{Z}_0\big(r,G' : G(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,G-1) + Z_{2)}(r,G) - \overline{Z}_{2)}(r,G) \le Z(r,G').$$

Comme

$$\overline{Z}_{2)}(r,G) - Z_{2)}(r,G) = \overline{Z}(r,G) - Z(r,G) \quad \text{et} \quad Z(r,G') \le Z(r,G) + \overline{N}(r,G) - \log r + O(1),$$

on obtient

$$\overline{Z}_0\big(r,G' : G(x)\neq 0,1\big) + \overline{Z}_{2)}(r,G-1) \le \overline{Z}(r,G) + \overline{N}(r,G) - \log r + O(1). \tag{4.56}$$

Par conséquent, en appliquant le Théoréme 2.2.4 à F et, en considérant (4.54), (4.55) et (4.56), on obtient

$$\begin{aligned} T(r,F) &\le \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}(r,F-1) + \overline{N}(r,F) - Z_0\big(r,F'(x) : F(x)\neq 0, F(x)\neq 1\big) - \log r + O(1) \\ &= \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}_{2)}(r,G-1) + Z_1(r,F-1) + \overline{N}(r,F) - Z_0\big(r,F'(x) : F(x)\neq 0, F(x)\neq 1\big) \; - \\ &- \; \log r + O(1) \\ &\le \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}_{2)}(r,G-1) + \overline{N}_{2)}(r,F) + \overline{N}_{2)}(r,G) + Z_0\big(r,G'(x) : G(x)\neq 0, G(x)\neq 1\big) \; + \\ &+ \; \overline{Z}_{2)}(r,F) + \overline{Z}_{2)}(r,G) + \overline{N}(r,F) - 2\log r + O(1) \\ &\le \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}(r,G) + \overline{N}(r,G) + \overline{N}(r,F) + \overline{N}_{2)}(r,F) + \overline{N}_{2)}(r,G) + \overline{Z}_{2)}(r,F) \; + \\ &+ \; \overline{Z}_{2)}(r,G) - 3\log r + O(1). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Mais, d'après la définition de $\overline{Z}_{2)}(r,F)$ et d'après le Lemme 2.2.1, on voit que

$$\begin{aligned} \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}_{2)}(r,F) &\le 2\overline{Z}(r,f) + 2\overline{Z}(r,f-a) + 2\overline{Z}(r,f') - Z_1(r,f') + 2\deg(Q)\log r \\ &\le 2Z(r,f) + 2Z(r,f-a) + Z(r,f') + 2\deg(Q)\log r. \end{aligned}$$

De même, d'après la définition de $\overline{N}_{2)}(r,F)$, on a

$$\overline{N}(r,F)+\overline{N}_{2)}(r,F)\le 2\overline{N}(r,f)+2\deg(R)\log r\le 2N(r,f)+2\deg(R)\log r.$$

Puisque F et G satisfont les mêmes hypothèses, on a aussi

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r,G)+\overline{Z}_{2)}(r,G)&\le 2\overline{Z}(r,g)+2\overline{Z}(r,g-a)+2\overline{Z}(r,g')-Z_1(r,g')+2\deg(Q)\log r\\&\le 2Z(r,g)+2Z(r,g-a)+Z(r,g')+2\deg(Q)\log r\end{aligned}$$

et

$$\overline{N}(r,G)+\overline{N}_{2)}(r,G)\le 2\overline{N}(r,g)+2\deg(R)\log r\le 2N(r,g)+2\deg(R)\log r.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r,G)+\overline{Z}_{2)}(r,G)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}_{2)}(r,G)&\le 2Z(r,g)+2Z(r,g-a)+Z(r,g')+\\&+\ 2N(r,g)+4\deg(\alpha)\log r.\end{aligned}$$

En considérant l'inégalité précédente dans (4.57), on voit que

$$\begin{aligned}T(r,F)&\le 2Z(r,f)+2Z(r,f-a)+Z(r,f')+2N(r,f)+2Z(r,g)+2Z(r,g-a)+\\&+\ Z(r,g')+2N(r,g)+\Big[8\deg(\alpha)-3\Big]\log r+O(1).\end{aligned}\tag{4.58}$$

D'autre part, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T\big(r,P(f)\big)=(n+k+1)T(r,f)+O(1)$. Donc, en considérant cela et (4.58) dans (4.52), on obtient

$$\begin{aligned}(n+k+1)T(r,f)&\le 3Z(r,f)+(2-k)Z(r,f-a)+2N(r,f)+2Z(r,g)+2Z(r,g-a)+\\&+\ Z(r,g')+2N(r,g)+Z\big(r,V(f)\big)+\Big[10\deg(\alpha)-3\Big]\log r+O(1).\end{aligned}\tag{4.59}$$

Mais, d'après le Théorème 2.2.1, on a $Z\big(r,(g-a)'\big)\le Z(r,g-a)+\overline{N}(r,g-a)-\log r+O(1)$ et comme g et $g-a$ ont les mêmes dérivées et ont les mêmes pôles, on en déduit que

$$Z(r,g')\le Z(r,g-a)+\overline{N}(r,g)-\log r+O(1).$$

De plus, il est bien connu que $\max\big\{Z(r,f),N(r,f)\big\}\le T(r,f)+O(1)$ et, d'après le Théorème 2.3.1, on a $Z\big(r,V(f)\big)\le T\big(r,V(f)\big)=kT(r,f)+O(1)$. Alors, en considérant ces dernières inégalités dans (4.59), on obtient

$$\begin{aligned}(n+k+1)T(r,f)&\le(5+k)T(r,f)+5T(r,g)+(2-k)Z(r,f-a)+3Z(r,g-a)+\\&+\Big[10\deg(\alpha)-3\Big]\log r+O(1).\end{aligned}$$

Avec un procédé analogue, cette fois pour G, on obtient

$$\begin{aligned}(n+k+1)T(r,g)&\le(5+k)T(r,g)+5T(r,f)+(2-k)Z(r,g-a)+3Z(r,f-a)+\\&+\ \Big[10\deg(\alpha)-3\Big]\log r+O(1).\end{aligned}$$

En addionnant, les deux dernières inégalités, on a

$$(n+k+1)\big[T(r,f)+T(r,g)\big] \le (10+k)\big[T(r,f)+T(r,g)\big] + (5-k)\big[Z(r,f-a)+Z(r,g-a)\big]+ \\ + \Big[20\deg(\alpha)-6\Big]\log r + O(1).$$

Comme $Z(r,f-a) \le T(r,f-a) = T(r,f)+O(1)$ et $Z(r,g-a) \le T(r,g-a) = T(r,g)+O(1)$, l'inégalité précédente est réduite à

$$(n+k+1)\big[T(r,f)+T(r,g)\big] \le 15\big[T(r,f)+T(r,g)\big] + \Big[20\deg(\alpha)-6\Big]\log r + O(1).$$

Par conséquent, quand r tend vers $+\infty$, on a $n+k+1 \le 15$, une contradiction à l'hypothèse. Ainsi $\Phi = 0$.

Puisque $\Phi = \dfrac{\phi'}{\phi}$ où $\phi = \Big(\dfrac{F'}{(F-1)^2}\Big)\Big(\dfrac{(G-1)^2}{G'}\Big)$, quand $\Phi = 0$, il existe $A, B \in \mathbb{K}$ où $A \neq 0$, tels que

$$\frac{1}{G-1} = \frac{A}{F-1} + B. \tag{4.60}$$

Analysons les deux cas suivants : $B = 0$ et $B \neq 0$.

Cas 1. $B = 0$.

Supposons $A \neq 1$. D'après (4.60), on a $F = \dfrac{1}{A}G + \Big(1 - \dfrac{1}{A}\Big)$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à F, on a

$$\begin{aligned} T(r,F) &\le \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}\Big(r, F - \Big(1-\frac{1}{A}\Big)\Big) + \overline{N}(r,F) - \log r + O(1) \\ &\le \overline{Z}(r,f) + \overline{Z}(r,f-a) + \overline{Z}(r,f') + \overline{Z}(r,g) + \overline{Z}(r,g-a) + \overline{Z}(r,g') + \overline{N}(r,f) + \\ &+ (2s+q-1)\log r + O(1). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Mais, on sait que $\max\big\{\overline{Z}(r,f), \overline{N}(r,f)\big\} \le T(r,f) + O(1)$ et, on sait aussi que $\overline{Z}(r,f-a) \le T(r,f-a) \le T(r,f) + O(1)$ et $\overline{Z}(r,f') \le T(r,f') \le 2T(r,f) + O(1)$. De même pour g et g'. De plus, d'après le Lemme 2.3.2, on a

$$T(r,F) \ge (n+k)T(r,f) - \deg(\alpha)\log r.$$

Par conséquent, en considérant cela dans (4.61), on en déduit que

$$(n+k)T(r,f) \le 5T(r,f) + 4T(r,g) + \Big[3\deg(\alpha)-1\Big]\log r + O(1),$$

c'est-à-dire que

$$nT(r,f) \le (5-k)T(r,f) + 4T(r,g) + \Big[3\deg(\alpha)-1\Big]\log r + O(1).$$

Puisque F et G satisfont les mêmes hypothèses, on obtient de même

$$nT(r,g) \leq 4T(r,f) + (5-k)T(r,g) + \Big[3\deg(\alpha) - 1\Big]\log r + O(1).$$

Donc, en addionnant ces deux dérnières inégalités, on obtient

$$n\big[T(r,f) + T(r,g)\big] \leq (9-k)\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + \Big[6\deg(\alpha) - 2\Big]\log r + O(1),$$

d'où $n \leq 9-k$, une contradiction à l'hypothèse. Ainsi $A = 1$ et, d'après (4.60), on a $F = G$. Par conséquent, on en déduit que $\big(P(f)\big)' = \big(P(g)\big)'$, c'est-à-dire que $P'(f)f' = P'(g)g'$. Comme $n \geq 3k+1$ $(> k+2)$, d'après le Lemme 4.3.1, on a $P(f) = P(g)$. Mais, d'après le Théorème 4.1.1, le polynôme P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ car $k \geq 3$, et donc $f = g$.

Cas 2. $B \neq 0$.

D'abord on montrera que F et G ont une infinité de zéros et une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$. Supposons que F a seulement un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$. Alors il existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tel que $Z(r,F)$ est de la forme $q_1 \log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0,+\infty[$. De même, puisque $\alpha \in \mathbb{K}(x)$, il existe aussi $q_2 \in \mathbb{N}$ tel que $Z(r,\alpha)$ est de la forme $q_2 \log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0,+\infty[$. Par conséquent, comme $Z\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) \leq Z(r,F) + Z(r,\alpha)$, on a donc $Z\big(r, f^n(f-a)^k f'\big) \leq (q_1+q_2)\log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0,+\infty[$ et par suite, on déduit que $f^n(f-a)^k f'$ a seulement un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$, une contradiction d'après le Théorème 3.2.2. Même procédé pour G. Donc F et G ont une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$.

Maintenant il nous reste montrer que F et G ont une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$. Supposons le contraire. Comme F et $F-1$ ont les mêmes pôles, il n'y a qu'un nombre fini de $x \in \mathbb{K}$ tels que $\dfrac{1}{F-1}(x) = 0$. De même pour $G-1$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de $x \in \mathbb{K}$ tels que $\dfrac{1}{G-1}(x) = 0$. Ainsi, la valeur 0 est une valeur quasi-exceptionnelle de $\dfrac{1}{F-1}$ et $\dfrac{1}{G-1}$.

Si $\dfrac{1}{G-1}(x) = B$, d'après (4.60), on a $\dfrac{1}{F-1}(x) = 0$. Mais, comme on a supposé qu'il existe seulement un nombre fini de $x \in \mathbb{K}$ tels que $\dfrac{1}{F-1}(x) = 0$, on en déduit que $\dfrac{1}{G-1}(x) = B$ a seulement un nombre fini de solutions. Par conséquent, B est une valeur quasi-exceptionnelle de $\dfrac{1}{G-1}$, une contradiction d'après le Corollaire 1.7.8.2 car $\dfrac{1}{G-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est transcendante. D'une façon analogue, si $\dfrac{1}{F-1}(x) = -\dfrac{B}{A}$, d'après

(4.60), on a $\dfrac{1}{G-1}(x)=0$. Mais, on a supposé qu'il n'y a qu'un nombre fini de $x\in\mathbb{K}$ tels que $\dfrac{1}{G-1}(x)=0$, et donc $\dfrac{1}{F-1}(x)=-\dfrac{B}{A}$ a seulement un nombre fini de solutions. Par conséquent 0 et $-\dfrac{B}{A}$ sont deux valeurs quasi-exceptionnelles de $\dfrac{1}{F-1}$, une contradiction d'après le Corollaire 1.7.8.2 car elle est transcendante aussi. Ainsi, d'après les arguments précédents, F et G ont une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$.

D'autre part, on sait que

$$\overline{Z}(r,F)\leq Z(r,f)+Z(r,f-a)+Z(r,f')+\deg(R)\log r+O(1)\leq 4T(r,f)+\deg(R)\log r+O(1)$$

et

$$\overline{N}(r,F)\leq \overline{N}(r,f)+\deg(Q)\log r+O(1)\leq T(r,f)+\deg(Q)\log r+O(1).$$

De même pour G, c'est-à-dire $\overline{Z}(r,G)\leq 4T(r,g)+\deg(R)\log r+O(1)$ et $\overline{N}(r,G)\leq T(r,g)+\deg(Q)\log r+O(1)$. Par conséquent, on a

$$\overline{Z}(r,F)+\overline{Z}(r,G)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\leq 5\big[T(r,f)+T(r,g)\big]+4\deg(\alpha)\log r+O(1). \quad (4.62)$$

Mais, d'après (4.60), on déduit que $T(r,F)=T(r,G)+O(1)$ et, d'après le Lemme 2.3.2, on a

$T(r,f)\leq \dfrac{1}{n+k}T(r,F)+\deg(\alpha)\log r+O(1)$ et $T(r,g)\leq \dfrac{1}{n+k}T(r,G)+\deg(\alpha)\log r+O(1)$, d'où $T(r,f)+T(r,g)\leq \dfrac{2}{n+k}T(r,F)+2\deg(\alpha)\log r+O(1)$. Par conséquent, d'après (4.62), on a

$$\overline{Z}(r,F)+\overline{Z}(r,G)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\leq \frac{10}{n+k}T(r,F)+\frac{14}{n+k}\deg(\alpha)\log r+O(1).$$

Mais $n+k\geq 16$. Donc, l'inégalité précédente est réduite à

$$\overline{Z}(r,F)+\overline{Z}(r,G)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\leq \frac{10}{16}T(r,F)+\frac{14}{16}\deg(\alpha)\big\}\log r+O(1). \quad (4.63)$$

Puisque
$\overline{Z}(r,F)+\overline{Z}(r,G)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)-\min\big\{\overline{Z}(r,G),\ \overline{N}(r,G)\big\}=\overline{Z}(r,F)+\overline{N}(r,F)+\max\big\{\overline{Z}(r,G),\ \overline{N}(r,G)\big\}$, on déduit d'après (4.63), que

$$\overline{Z}(r,F)+\overline{N}(r,F)+\max\Big\{\overline{Z}(r,G),\overline{N}(r,G)\Big\}\leq \frac{5}{8}T(r,F)+\frac{7}{8}\log r-\min\big\{\overline{Z}(r,G),\overline{N}(r,G)\big\}+O(1).$$

Comme G a une infinité de zéros et une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$, on a

$$\min\big\{\overline{Z}(r,G),\overline{N}(r,G)\big\}>\frac{7}{8}\log r+O(1)\quad \forall r\in]0,+\infty[.$$

Par conséquent,

$$\overline{Z}(r,F)+\overline{N}(r,F)+\max\left\{\overline{Z}(r,G),\overline{N}(r,G)\right\}<\frac{2}{3}T(r,F).$$

Alors, d'après le Lemme 4.3.5, on peut conclure que $F=G$ ou bien $FG=1$.

Supposons $FG=1$. Alors $\frac{1}{\alpha^2}\Big[f^n(f-a)^k f' g^n(g-a)^k g'\Big]=1$, une contradiction d'après le Lemme 4.3.6 car $n>3k+1$ et $\alpha^2\in\mathbb{K}[x]$. Ainsi $F=G$ et donc, comme dans le *Cas 1*, on conclut grâce aux Lemme 4.3.1 et Théorème 4.1.1. □

Remarque. Le théorème précédent n'est pas valable si on considère des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ parce que la propiété $Z(r,f')\leq Z(r,f)+\overline{N}(r,f)+O(1)$ (Théorème 2.2.1) qu'on utilise dans la démonstration n'est pas vraie. Un contre-exemple pour montrer cela est le suivant :

Soit $f(x)=e^{\sin x}$. Clairement $f\in\mathcal{A}(\mathbb{C})$ n'admet pas de zéros dans $\mathbb{C}$, alors $Z(r,f)=0$ $\forall r\in]0,+\infty[$. Remarquons aussi que $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$ et on voit que les zéros de f' sont exactement les zéros de $\cos x$. Donc $Z(r,f')=Z(r,\cos x)$ et ainsi $\lim\limits_{r\to+\infty}Z(r,f')=+\infty$. Par conséquent, on a $Z(r,f')-Z(r,f)=+\infty$, une contradiction à la propriété.

Pour terminer ce chapitre, on va étudier les relations entre les fonctions f et g méromorphes, dans $\mathbb{K}$ ou dans $d(\theta,R^-)$, quand $P'(f)f'=P'(g)g'$ partagent une petite fonction α et $k=1$ ou $k=2$.

Dans la démonstration du Théorème 4.3.4, le Théorème 4.1.3 est essentiel. Il affirme qu'un polynôme P, de degré ≥ 6 dont la dérivé a seulement deux zéros distincts, l'un étant d'ordre 2 et l'autre étant d'ordre ≥ 3, est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))$. On ne connait pas de généralisation à ce théorème et c'est l'obstacle à une généralisation du Théorème 4.3.4 pour pouvoir prendre $k\in\mathbb{N}$ au lieu de $k=1$ ou $k=2$.

Théorème 4.3.4. *Soient $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ transcendantes $\big($resp. $f,g\in\mathcal{M}_u(d(\theta,R^-))\big)$ et soit $\alpha\in\mathbb{K}(x)$. Soit $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ et soit $n\geq 13$ un entier. Si $f^n(f-a)^2f'$ et $g^n(g-a)^2g'$ partagent la fonction α C. M., alors $f=g$. De plus, si $f^n(f-a)f'$ et $g^n(g-a)g'$ partagent la fonction α C. M., quand $n\geq 11$, alors il existe une fonction $h\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h\in\mathcal{M}(d(\theta,R^-))\big)$ telle que $f=\dfrac{a(n+2)}{n+1}\Big(\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{n+2}-1}\Big)h$ et $g=\dfrac{a(n+2)}{n+1}\Big(\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{n+2}-1}\Big)$ ou bien $f=g$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, supposons $\theta=0$. Puisque $\alpha\in\mathbb{K}$, il existe $Q,R\in\mathbb{K}[x]$ sans zéros communs, tels que $\alpha=\dfrac{Q}{S}\in\mathbb{K}(x)$.

Posons $F = \dfrac{f^n(f-a)^k f'}{\alpha}$ et $G = \dfrac{g^n(g-a)^k g'}{\alpha}$. Il est clair que F et G partagent la valeur 1 C. M. car d'après l'hypothèse, $f^n(f-a)^k f'$ et $g^n(g-a)^k g'$ partagent la fonction α C. M. quand $k=1$ ou quand $k=2$.

Posons Φ comme dans (4.53). Avec un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème précédent, on en déduit que $\Phi = 0$. Donc, il existe $A, B \in \mathbb{K}$ où $A \neq 0$, tels que

$$\frac{A}{F-1} = \frac{1}{G-1} - B. \tag{4.64}$$

Considérons les 2 cas suivants : $B = 0$ et $B \neq 0$.

Cas 1. $B = 0$.

Supposons $A \neq 1$. D'après (4.64), on a $F = \dfrac{1}{A}G + \Big(1 - \dfrac{1}{A}\Big)$. En appliquant le Théorème 2.2.4 à F, on obtient, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, que

$$T(r,F) \leq \overline{Z}(r,F) + \overline{Z}\Big(r, F - \big(1 - \frac{1}{A}\big)\Big) + \overline{N}(r,F) - \log r + O(1). \tag{4.65}$$

Mais $\overline{Z}\Big(r, F - \big(1 - \dfrac{1}{A}\big)\Big) \leq Z(r,g) + Z(r,g-a) + Z(r,g') + \deg(R)\log r + O(1)$ et donc, d'après le Théorème 2.2.1, on a $Z\Big(r, F - \big(1 - \dfrac{1}{A}\big)\Big) \leq 4T(r,g) + \deg(R)\log r + O(1)$. De même, on a

$$\overline{Z}(r,F) \leq Z(r,f) + Z(r,f-a) + Z(r,f') + \deg(R)\log r + O(1) \leq 4T(r,f) + \deg(R)\log r + O(1)$$

et $\overline{N}(r,F) \leq \overline{N}(r,f) + \deg(Q)\log r + O(1) \leq T(r,f) + \deg(Q)\log r + O(1)$. De plus, d'après le Lemme 2.3.2, on a $T(r,F) \geq (n+k)T(r,f) - \deg(\alpha)\log r + O(1)$. Alors, l'inégalité (4.65) est réduite à

$$nT(r,f) \leq (5-k)T(r,f) + 4T(r,g) + 4\deg(\alpha)\log r + O(1).$$

Puisque G satisfait les mêmes hypothèses que F, on a aussi

$$nT(r,g) \leq (5-k)T(r,g) + 4T(r,f) + 4\deg(\alpha)\log r + O(1).$$

Donc, en additionnant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$n\big[T(r,f) + T(r,g)\big] \leq (9-k)\big[T(r,f) + T(r,g)\big] + 8\deg(\alpha)\log r + O(1)$$

d'où $n \leq 9 - k$, une contradiction à l'hypothèse quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$ et $k = 1$ ou $k = 2$. Par conséquent $A = 1$ et donc $F = G$.

Pour $k = 1$, posons $P(x) = x^{n+1}\Big(\dfrac{x}{n+2} - \dfrac{a}{n+1}\Big)$ et, pour $k = 2$, posons $P(x) = x^{n+1}\Big(\dfrac{1}{n+3}x^2 - \dfrac{2a}{n+2}x + \dfrac{a^2}{n+1}\Big)$. Alors $\big(P(f)\big)' = \alpha F$ et $\big(P(g)\big)' = \alpha G$ et, comme $F = G$, on en déduit que $P'(f)f' = P'(g)g'$. Par conséquent, d'après le Lemme 4.3.1, on a $P(f) = P(g)$.

Pour $k = 1$. Comme $P(f) = P(g)$, on a

$$f^{n+1}\Big(\frac{f}{n+2} - \frac{a}{n+1}\Big) = g^{n+1}\Big(\frac{g}{n+2} - \frac{a}{n+1}\Big).$$

Posons $f = h\,g$. Clairement $h \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$. Supposons $h \neq 1$. Donc, d'après l'égalité précédente, $\dfrac{1}{n+2}g^{n+2}(h^{n+2}-1) = \dfrac{a}{n+1}g^{n+1}(h^{n+1}-1)$, c'est-à-dire que $g = \dfrac{a(n+2)}{n+1}\Big(\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{n+2}-1}\Big)$. Comme $f = h\,g$, on déduit que $f = \dfrac{a(n+2)}{n+1}\Big(\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{n+2}-1}\Big)h$. Si $h = 1$, évidement, $f = g$.

Pour $k = 2$. D'après le Théorème 4.1.1 $\big($resp. Théorème 4.1.3$\big)$, P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. pour $\mathcal{M}_u(d(0, R^-))\big)$ et donc $f = g$ ce qui achève la démonstration.

Cas 2. $B \neq 0$.

Avec un procédé analogue au *Cas 2* de la démonstration du Théorème 4.3.3, on déduit que

$$\overline{Z}(r, F) + \overline{N}(r, F) + \max\big\{\overline{Z}(r, G),\ \overline{N}(r, G)\big\} \leq \frac{10}{n+k}\,T(r, F) - \min\big\{\overline{Z}(r, G),\ \overline{N}(r, G)\big\} + \\ + \frac{14}{n+k}\deg(\alpha)\log r + O(1).$$

Mais, comme dans la démonstration du Théorème 4.3.3, F et G ont une infinité de zéros et une infinité de pôles dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(0, R^-)\big)$. Donc

$$\min\big\{\overline{Z}(r, G),\ \overline{N}(r, G) > \frac{14}{n+k}\deg(\alpha)\log r + O(1) \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(\text{resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Alors, on a

$$\overline{Z}(r, F) + \overline{N}(r, F) + \max\big\{\overline{Z}(r, G),\ \overline{N}(r, G)\big\} \leq \frac{10}{n+k}\,T(r, F) + O(1).$$

Par conséquent, pour $k = 1$, on obtient

$$\overline{Z}(r, F) + \overline{N}(r, F) + \max\big\{\overline{Z}(r, G),\ \overline{N}(r, G)\big\} < \frac{6}{7}\,T(r, F)$$

et pour $k = 2$, on obtient

$$\overline{Z}(r,F) + \overline{N}(r,F) + \max\big\{\overline{Z}(r,G),\ \overline{N}(r,G)\big\} < \frac{3}{4}\, T(r,F).$$

Ainsi,

$$T(r,F) > \limsup_{r\to+\infty} \Big\{\overline{Z}(r,F) + \overline{N}(r,F) + \max\big\{\overline{Z}(r,G),\ \overline{N}(r,G)\big\}\Big\}$$

$\Big($resp. $T(r,F) > \limsup\limits_{r\to R^-} \Big\{\overline{Z}(r,F) + \overline{N}(r,F) + \max\big\{\overline{Z}(r,G),\ \overline{N}(r,G)\big\}\Big\}\Big)$. Comme F et G sont transcendantes $\big($resp. $T(r,F)$ et $T(r,G)$ sont non-bornées dans $]0,R[\big)$, d'après le Lemme 4.3.5, on a $F = G$ ou bien $FG = 1$.

Si $FG = 1$, on a $f^n(f-a)^k f' g^n (g-a)^k g' = \alpha^2$, une contradiction d'après le Lemme 4.3.6 quand $n \geq 11$ et $k = 1$, ou bien quand $n \geq 13$ et $k = 2$. Ainsi $F = G$, c'est-à-dire $P'(f)f' = P'(g)g'$, et donc, d'après le Lemme 4.3.1, on a $P(f) = P(g)$. Mais, d'après le Théorème 4.1.2 $\big($resp. Théorème 4.1.3$\big)$, le polynôme P est un polynôme d'unicité pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. pour $\mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ et donc $f = g$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque. Dans le Théorème 4.3.4, quand $k = 1$, on obtient deux conclusions possibles : ou bien $f = g$ ou bien $g = \dfrac{a(n+2)}{n+1}\Big(\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{n+2}-1}\Big)$ et $f = h\ g$. Cette seconde conclusion n'est pas surprenante et s'impose de façon triviale. En effet, soit $h \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{M}(d(\theta,R^-))\big)$ et soient f et g définies comme ci-dessus. D'après le remarque qui suit le Théorème 4.1.2, on voit que le polynôme $P(x) = x^{n+1}\Big(\dfrac{x}{n+2} - \dfrac{a}{n+1}\Big)$ satisfait $P(f) = P(g)$, donc $P'(f)f' = P'(g)g'$. Par conséquent, les fonction $P'(f)f'$ et $P'(g)g'$ partagent trivialement n'importe quelle fonction.

Chapitre 5

Solutions admissibles pour des équations fonctionnelles du type Diophantienne

5.1 Introduction

Dans $\mathbb{C}$, on sait que les courbes algébriques de genre ≥ 2 n'admettent pas de paramétrisation par des fonctions méromorphes non constantes $\big($voir Théorème de Picard [56]$\big)$. Alors que, dans un corps ultramétrique, le Théorème de Picard-Berkovich montre que toute courbe algébrique de genre non nul n'admet aucune paramétrisation par des fonctions méromorphes ultramétriques non constantes.

Théorème 5.1.1. $\big($Théorème 4.5.1 [9]$\big)$ $\big($Théorème de Picard-Berkovich$\big)$
Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique irréductible sur $\mathbb{K}$ de genre ≥ 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ une suite bornée et soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ satisfaisant $\big(f(a_n), g(a_n)\big) \in \mathcal{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors f et g sont constantes.

Notation. Dorénavant, pour $m, n \in \mathbb{N}$, on note (m, n) le plus grand commun diviseur de m et n.

En utisant la théorie de Nevanlinna p-adique, A. Boutabaa et A. Escassut montrent le résultat suivant, qui entraîne facilement le Théorème de Picard-Berkovich pour des courbes de genre 1 et 2.

Théorème 5.1.2. $\big($Théorème 2 [14]$\big)$ *Soient* $P(x) = a\prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{p_i}$ *et* $Q(x) = b\prod_{j=1}^{t}(x-b_j)^{q_j}$ *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *où* a_i *et* b_i *sont tous distincts. Soit* $m \in \mathbb{N}$ *et soient* $f, g \in \mathcal{M}(d(0, R^-))$ *satisfaisant* $\big(g(x)\big)^m\ Q\big(f(x)\big) = P\big(f(x)\big)\ \ \forall x \in d(0, r)$ *où* $r \in]0, R[$.

(i) *Si* $s + t > 1 + \dfrac{1}{m}\Big(\big(m, \big|\deg(P) - \deg(Q)\big|_\infty\big) + \sum_{i=1}^{s}(m, p_i) + \sum_{j=1}^{t}(m, q_j)\Big)$,
alors $f, g \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$.
De plus, si $f \in \mathcal{A}(d(0, R^-))$ *et si* $s + t > 1 + \dfrac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{s}(m, p_i) + \sum_{j=1}^{t}(m, q_j)\Big)$, *alors* $f \in \mathcal{A}_b(d(0, R^-))$ *et* $g \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))$.

(ii) *Si* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *et si* $s+t \geq 1+\dfrac{1}{m}\Big(\big(m, \big|\deg(P)-\deg(Q)\big|_\infty\big)+\sum_{i=1}^{s}(m, p_i)+\sum_{j=1}^{t}(m, q_j)\Big)$,
alors f *et* g *sont constantes.*

Chaque courbe algébrique de genre 1 (resp. 2) est birationnellement équivalente à une courbe elliptique (hyperelliptique) plane [56]. Donc, en prenant $m = 2$, $\deg(Q) = 0$ et $\deg(P) = s = 3$ dans le Théorème 5.1.2 (ii), on obtient :

Corollaire 5.1.2.1. *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe algébrique sur* $\mathbb{K}$ *de genre* 1 *ou* 2. *Si* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *sont telles que* $\big(f(x), g(x)\big) \in \mathcal{C}\ \ \forall x \in \mathbb{K}$, *alors* f *et* g *sont constantes.*

De même, en prenant $\deg(P) \geq 4$ et $s \geq 4$ dans le Théorème 5.1.2 (ii) $\big($resp. Théorème 5.1.2 $(i)\big)$, on obtient :

Corollaire 5.1.2.2. *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe algébrique sur* $\mathbb{K}$ *de genre* 2. *Si* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *telles que* $\big(f(x), g(x)\big) \in \mathcal{C}\ \ \forall x \in \mathbb{K}$ $\big($*resp.* $\forall x \in d(0, r)$ *où* $r \in]0, R[\big)$, *alors* f *et* g *sont constantes* $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{M}_b(d(0, R^-))\big)$.

Au cours des dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'existence ou non de fonctions méromorphes qui sont solutions des équations fonctionnelles de la forme $P(f) = Q(g)$ où P et Q sont des polynômes non constants sur un corps. Par exemple, dans $\mathbb{C}$, H. Ha et C. C. Yang [33] obtiennent des résultats concernant les singularités et le genre des courbes algébriques, résultats qui sont améliorés par P. Li et C. C. Yang [46] en utilisant la théorie de distribution de valeurs.

Remarque. Dans [46], P. Li et C. C. Yang proposent des exemples qui nous font penser que la conjecture suivante est vraie dans $\mathbb{C}$.

Soit $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ un polynôme de degré ≥ 3. Si l'équation diophantienne $F(x,y)=0$ est irréductible et n'admet pas ou bien admet au plus un nombre fini de solutions rationnelles, alors l'équation fonctionnelle correspondant $F(f,g)=0$ n'admet pas ou bien admet au plus un nombre fini de solutions méromorphes non constantes dans $\mathbb{C}$.

L'exemple suivant montre la conjecture pour le cas ultramétrique :

Exemple. L'équation diophantienne $x^3+x^2+y^3=1$ admet une solutions rationnelle $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. Mais elle représente une courbe elliptique de genre 1 et donc, d'après le Théorème 5.1.1, elle n'admet aucune paramétrisation par des fonctions méromorphes non constantes dans $\mathbb{K}$.

A. Escassut et C. C. Yang [23], inspirés par les travaux précédents, ont étudié l'existence de fonctions méromorphes qui sont solutions de ces équations fonctionnelles $P(f)=P(g)$, mais cette fois sur le corps ultramétrique $\mathbb{K}$. Ils ont obtenu des conditions suffisantes, notamment en utilisant les zéros de P' et Q', qui permettent de caractériser les fonctions f et g, solutions de cette équation.

Ici, on considère un problème similaire à celui de P. Li et C. C. Yang [47] dans $\mathbb{C}$ où ils ont établi une sorte de généralisation des résultats précédents en considérant des équations fonctionnelles de la même forme, mais cette fois les polynômes P et Q ont des coefficients méromorphes dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $d(a,R^-)\big)$. On obtient des résultats analogues sur l'existence ou non de *"solutions admissibles"* pour cette équation, sauf peut-être les résultats qui concernent la fonction exponentielle dans $\mathbb{C}$. Pour cela on utilise la théorie de Nevanlinna p-adique et quelques propriétés spécifiques de fonctions analytiques ultramétriques.

Rappelons d'abord la définition de *"solution admissible"* donnée par P. Li et C. C. Yang dans [47].

Définition. Soit $P_j \in \mathcal{M}(\mathbb{K})[X,Y]$ $\big($resp. $P_j \in \mathcal{M}(d(0,R^-))[X,Y]\big)$ $(1 \leq j \leq q)$ et soit $\mathcal{E}_j$ $(1 \leq j \leq q)$ un système d'équations de la forme $P_j(f,g)=0$ $(1 \leq j \leq q)$. Soient $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f,g \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$. La paire (f,g) est appelée *une paire de solutions admissibles de $\mathcal{E}_j$*, si pour chaque $j=1,2,...,q$, tous les coefficients de P_j sont des petites fonctions par rapport à f et g à la fois.

De même que le Théorème de Picard sur $\mathbb{C}$ et le Théorème de Picard-Berkovich sur $\mathbb{K}$, ont pour but de montrer l'inexistence d'une paire (f,g) de solutions admissibles pour une équation algébrique de genre ≥ 2 ou ≥ 1, dans ce chapitre on va chercher des conditions montrant l'inexistence d'une paire de solutions admissibles pour des équations fonctionnelles dont les coefficients seraient des fonctions méromorphes : de telles équations ont peut-être des paires de solutions (f,g) mais alors les coefficients ne sont pas tous des petites fonctions par rapport à f et g.

5.2 Solutions admissibles pour quelques équations fonctionnelles

Théorème 5.2.1. *Soit* $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *telles que* a_1 *ou* a_3 *est non nulle. Soient* $n, m, k \in \mathbb{N}^*$ *satisfaisant* $n > m$, $k > 1$ *et* $n > \dfrac{k(m+2)}{k-1}$. *Alors, l'équation* $\mathcal{E}:\ x^n + a_1x^{n-m} + a_2y^k - a_3 = 0$ *n'admet aucune paire* (f, g) *de solutions admissibles.*

Démonstration. — D'après le Corollaire 2.3.3.1, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ est transcendante sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. sur $\mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$. Donc, évidement $a_2 \neq 0$.

Supposons que la paire (f, g) est une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$. Donc $f^n + a_1f^{n-m} = a_3 - a_2g^k$ et, d'après la définition précédente, on a $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\Big($resp. $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-) \cap \mathcal{M}_g(d(0, R^-))\Big)$.

Posons $F = f^n + a_1f^{n-m}$. Puisque $a_3 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_3 \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-))\big)$ et puisque $0 < n - m < n$, il est clair que $a_3 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_3 \in \mathcal{M}_F(d(0, R^-))\big)$. Donc, on peut appliquer à F le Corollaire 2.3.4.1 et alors, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a

$$T(r, F) \leq \overline{Z}(r, F) + \overline{Z}(r, F - a_3) + \overline{N}(r, F) + S_F(r). \tag{5.1}$$

Remarquons que $\overline{Z}(r, F) \leq Z(r, f) + mZ(r, f) + S_f(r) \leq (m + 1)T(r, f) + S_f(r)$, $\overline{Z}(r, F - a_3) \leq \overline{Z}(r, g) + S_f(r) \leq T(r, g) + S_f(r)$ et $\overline{N}(r, F) = \overline{N}(r, f) + S_f(r) \leq T(r, f) + S_f(r)$. De plus, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, F) = nT(r, f) + S_f(r)$. Ainsi, d'après (5.1), on obtient

$$(n - m - 2)T(r, f) \leq T(r, g) + S_f(r). \tag{5.2}$$

Puisque $kT(r, g) + S_g(r) = nT(r, f) + S_f(r)$, on déduit que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{kT(r, g)}{nT(r, f)} = 1$ $\Big($resp. $\displaystyle\lim_{r\to R^-} \frac{kT(r, g)}{nT(r, f)} = 1\Big)$. Par conséquent $T(r, g) = \dfrac{n}{k}\, T(r, f) + S_f(r)$. Ainsi, d'après (5.2), on a $kn - k(m+2) \leq n$ quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, c'est-à-dire que $n \leq \dfrac{k(m+2)}{k-1}$, une contradiction d'après l'hypothèse et donc, la paire (f, g) n'est pas une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$. $\square$

Corollaire 5.2.1.1. *Soient* $a_i, b_i, c_i \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $a_i, b_i, c_i \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ $(i = 1, 2)$, *telles que* $b_2 \neq 0$ *et*, $\dfrac{b_1}{b_2} \neq 0$ *ou* $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$. *Soit* $F(x, y)$ *un polynôme dont* *les coefficients sont des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{K}$ $\big($*resp. dans* $d(0, R^-)\big)$. *Soient* $m, n, k \in \mathbb{N}^*$ *satisfaisant* $n > m$, $k > 1$ *et* $n > \dfrac{k(m+2)}{k-1}$. *Alors, le système*

$$\mathcal{E}_2 : \quad \begin{cases} x^n + a_1 y^k + b_1 F(x, y) & = c_1 \\ x^{n-m} + a_2 y^k + b_2 F(x, y) & = c_2 \end{cases}$$

n'admet aucune paire (f, g) *de solutions admissibles.*

Démonstration. — D'après le système $\mathcal{E}_2$, on déduit facilement que

$$x^n + \frac{-b_1}{b_2} x^{n-m} + \Big(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2}\Big) y^k = \Big(\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_2}\Big).$$

Donc, d'après le Théorème 5.2.1, l'équation fonctionnelle ci-dessus n'admet aucune paire (f, g) de solutions admissibles, ce qui entraîne que (f, g) n'est pas non plus une paire de solutions admissibles du système $\mathcal{E}_2$. □

Théorème 5.2.2. *Soient* $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *telles que* a_1 *ou* a_3 *soit non nulle. Soient* $m, k \in \mathbb{N}$ *tels que* $m = 2$ *et* $k > 3$ *ou* $m = 3$ *et* $k > 6$. *Alors l'équation* $\mathcal{E} : \ x^5 + a_1 x^{5-m} + a_2 y^k - a_3 = 0$ *n'admet aucune paire* (f, g) *de solutions admissibles.*

Démonstration. — Soient $m = 2$ et $k > 3$. Supposons que la paire (f, g) est une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$. Donc, $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\Big($resp. $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{M}_f(d(0, R^-)) \cap \mathcal{M}_g(d(0, R^-))\Big)$ et $f^5 + a_1 f^{m-5} = a_3 - a_2 g^k$.

Posons $F = f^5 + a_1 f^{5-m}$. Comme dans la démonstration du Théorème 5.2.1, on a $a_3 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_3 \in \mathcal{M}_F(d(0, R^-))\big)$. Donc, en appliquant le Corollaire 2.3.4.1 à F, on obtient

$$T(r, F) \leq \overline{Z}(r, F) + \overline{Z}(r, F - a_3) + \overline{N}(r, F) + S_f(r). \tag{5.3}$$

Clairement $\overline{N}(r, F) = \overline{N}(r, f) + S_f(r)$. Comme chaque pôle de f a un ordre de multiplicité au moins égal à k, on déduit que $\overline{N}(r, F) \leq \dfrac{1}{k} N(r, f) + S_f(r) \leq \dfrac{1}{k} T(r, f) + S_f(r)$. De plus, comme dans la démonstration du Théorème 5.2.1, on a $\overline{Z}(r, F) \leq (m+1) T(r, f) + S_f(r)$, $\overline{Z}(r, F - a_3) \leq T(r, g) + S_f(r)$ et $T(r, g) = \dfrac{5}{k} T(r, f) + S_f(r)$. Ainsi, d'après (5.3), on obtient

$$5T(r, f) \leq \Big(m + 1 + \frac{5+1}{k}\Big) T(r, f) + S_f(r),$$

ce qui entraîne $5 \leq m+1+\dfrac{6}{k}$ quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$. Mais, pour $m=2$, on obtient $k \leq 3$ ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, l'équation $\mathcal{E}$ n'admet aucune paire (f,g) de solutions admissibles.

Pour les cas $m=3$ et $k>6$, on peut suivre une méthode analogue pour conclure. $\square$

Les Théorèmes 5.2.1 et 5.2.2 suggèrent la question suivante à laquelle on ne peut pas répondre pour le moment.

Question Ouverte. Soient $a_1,a_2,a_3 \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1,a_2,a_3 \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ telles que a_1 ou a_3 sont non nulles et soit $k \in \mathbb{N}$. Existe-t-il des fonctions $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f,g \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ telles que la paire (f,g) soit une paire de solutions admissibles pour les équations fonctionnelles $\mathcal{E}$: $f^5+a_1f^3+a_2g^k=a_3$ quand $1<k<4$ et $\mathcal{E}'$: $f^5+a_1f^2+a_2g^k=a_3$ quand $1<k<7$?

Théorème 5.2.3. *Soient $n,k \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(x)=c_0+c_1(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}...(x-x_k)^{m_k}$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$, tels que $c_0c_1 \neq 0$ et $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$. Soit $a \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$. Si $n>2k+1$, alors l'équation $\mathcal{E}$: $P(x)=aP(y)$ n'admet aucune paire (f,g) de solutions admissibles.*

Démonstration. — En posant $Q(x)=P(x)-c_0$, l'équation $\mathcal{E}$ est équivalente à l'équation

$$\mathcal{E}': \quad Q(x)-aQ(y)=c_0(a-1).$$

Supposons que la paire (f,g) est une paire de solutions admissibles de $\mathcal{E}'$. Puisque $c_0(a-1) \in \mathcal{M}_f(\mathbb{K})$ $\big($resp. $c_0(a-1) \in \mathcal{M}_f(d(0,R^-))\big)$ et puisque $T(r,f) \leq T(r,Q(f))$ pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on déduit que $c_0(a-1) \in \mathcal{M}_{Q(f)}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $c_0(a-1) \in \mathcal{M}_{Q(f)}(d(0,R^-))\big)$. Donc, en appliquant le Corollaire 2.3.4.1 à $Q(f)$, on obtient

$$T\big(r,Q(f)\big) \leq \overline{Z}\big(r,Q(f)\big)+\overline{Z}\big(r,aQ(g)\big)+\overline{N}\big(r,Q(f)\big)+S_{Q(f)}(r). \tag{5.4}$$

Mais, on sait que $\overline{Z}\big(r,Q(f)\big)=\sum_{i=1}^{k}\overline{Z}(r,f-x_i) \leq k\ T(r,f)+O(1)$. De même $\overline{Z}\big(r,aQ(g)\big) \leq k\ T(r,g)+S_g(r)$ et $\overline{N}\big(r,Q(f)\big) \leq T(r,f)+O(1)$. De plus, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T\big((r,Q(f)\big)=nT(r,f)+S_f(r)$. Ainsi, l'inégalité (5.4) nous donne

$$nT(r,f) \leq (k+1)T(r,f)+kT(r,g)+S_f(r)+S_g(r).$$

D'autre part, puisque $Q(f)=aQ(g)+c_0(a-1)$, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r,f)=T(r,g)+S_g(r)$. Mais ici, il est clair que $S_f(r)=S_g(r)$. Donc, d'après l'inégalité précédente, on obtient

$$nT(r,f) \leq (2k+1)T(r,f)+S_f(r).$$

Par conséquent, quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on obtient $n \leq 2k+1$, contradiction. Donc, l'équation $\mathcal{E}'$ n'admet aucune paire (f,g) de solutions admissibles et alors $\mathcal{E}$ non plus. $\square$

Dans les deux théorèmes suivants on montre que si l'équation fonctionnelle $P(x) = aP(y)$ où $P \in \mathbb{K}[x]$, admet une paire de solutions admissibles, alors elles ont une forme très particulaire. Ceci généralise les résultats connus sur les courbes algébriques, ainsi que le Théorème 4.3.4 du Chapitre précédent.

Théorème 5.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(x) = (x-x_1)^{n-1}(x-x_2)$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$, tels que $x_1 \neq x_2$. Soit $a \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$. Si la paire (f,g) est une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}: P(x) = aP(y)$, alors*

$$f = x_1 + \frac{(x_2-x_1)(h^{n-1}-a)\ h}{h^n - a} \qquad \text{et} \qquad g = x_1 + \frac{(x_2-x_1)(h^{n-1}-a)}{h^n-a}.$$

De plus $h \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ et $a \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\big)$.

Démonstration. — Supposons que la paire (f,g) est une solution admissible de l'équation $\mathcal{E}$. Donc,

$$\Big(\frac{f-x_1}{g-x_1}\Big)^{n-1}\Big(\frac{f-x_2}{g-x_2}\Big) = a. \tag{5.5}$$

Posons $f_1 = f - x_1$, $g_1 = g - x_1$ et $h = \dfrac{f_1}{g_1}$. Dans (5.5), on obtient

$$h^{n-1}\big(g_1 h + (x_1 - x_2)\big) = a\big(g_1 + (x_1 - x_2)\big).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$g_1 = \frac{(x_2-x_1)(h^{n-1}-a)}{h^n-a}$$

et, comme $f_1 = hg_1$, on obtient

$$f_1 = \frac{(x_2-x_1)h(h^{n-1}-a)}{h^n-a}.$$

Remarquons que, puisque (f,g) est une paire de solutions admissibles, on a $a \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_g(d(0,R^-))\big)$ et donc $a \in \mathcal{M}_{g_1}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_{g_1}(d(0,R^-))\big)$. Si $a \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\big)$, on a donc la conclusion annoncée.

Supposons que $a \notin \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \notin \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\big)$. Puisque $a \in \mathcal{M}_{g_1}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_{g_1}(d(0,R^-))\big)$, on peut déduire assez facilement que, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a

$$T(r,g_1) \leq (2n-1)T(r,h) + S_{g_1}(r). \tag{5.6}$$

D'autre part, puisque $a \notin \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \notin \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\big)$, il existe une constante $M > 0$ et une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\Big($resp. une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,R[$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R\Big)$ telles que $T(r_n,h) \leq M\ T(r_n,a)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, d'après (5.6), on a $T(r_n,g_1) \leq (2n-1)\ M\ T(r_n,a) + S_{g_1}(r_n)\quad \forall n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse $a \in \mathcal{M}_{g_1}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a \in \mathcal{M}_{g_1}(d(0,R^-))\big)$ quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$. □

Notation. Soient $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f,g \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ et soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Dans le théorème suivant on note $Z_{m)}(r,f)$ $\big($resp. $\overline{Z}_{m)}(r,f)\big)$ la fonction de comptage des zéros de f avec ordre de multiplicité $\geq m$, en prenant en compte les multiplicités $\big($resp. en ignorant les multiplicités$\big)$ dans $d(0,r)$. De même, on note $\overline{Z}(r,f\ ;\ g)$ la fonction de comptage des zéros communs de f et g, en ignorant les multiplicités, dans $d(0,r)$.

Théorème 5.2.5. *Soient $a_1,a_2,b_1,b_2,c \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1,a_2,b_1,b_2,c \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ non identiquement nulles. Soient $n,m \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n,m)=1$, $m \geq 2$ et $n \geq 2m+3$. Alors, l'équation*

$$\mathcal{E}: \qquad x^n + a_1x^{n-m} + b_1 = c\left(y^n + a_2y^{n-m} + b_2\right)$$

admet une paire (f,g) de solutions admissibles si et seulement si $c = \dfrac{b_1}{b_2}$ et $f = hg$ où $h \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ satisfait $h^n = c$ et $h^m = \dfrac{a_1}{a_2}$.

Démonstration. — Supposons d'abord que $c = \dfrac{b_1}{b_2}$, $h^n = c$ et $h^m = \dfrac{a_1}{a_2}$. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g \in \mathcal{M}(d(0,R^-))\big)$ telle que $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathcal{M}_g(d(0,R^-))\big)$ et soit $f = hg$. Alors, il est clair que (f,g) est une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$.

Supposons maintenant que (f,g) soit une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$. Posant $f_1 = f^n + a_1f^{n-m}$ et $g_1 = -cg^n - ca_2g^{n-m}$, on a $f_1 + g_1 = cb_2 - b_1$ et puisque b_1 et b_2 sont des petites fonctions par rapport à f, la fonction $cb_2 - b_1$ l'est aussi.

Supposons que $cb_2 - b_1 \neq 0$. Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. En appliquant le Corollaire 2.3.4.2 à f_1, on obtient

$$T(r, f_1) \leq \overline{Z}(r, f_1) + \overline{Z}(r, g_1) + \overline{N}(r, f_1) + S_{f_1}(r).$$

Mais
$\overline{Z}(r, f_1) \leq \overline{Z}(r, f^{n-m}) + \overline{Z}(r, f^m + a_1) \leq Z(r, f) + mZ(r, f) + S_f(r) \leq (m+1)T(r, f) + S_f(r)$,
$\overline{Z}(r, g_1) \leq \overline{Z}(r, g^{n-m}) + \overline{Z}(r, g^m + a_2) \leq Z(r, g) + mZ(r, g) + S_g(r) \leq (m+1)T(r, g) + S_g(r)$
et $\overline{N}(r, f_1) \leq \overline{N}(r, f) + S_f(r) \leq T(r, f) + S_f(r)$. De plus, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f_1) = mT(r, f) + S_f(r)$. Donc, on déduit que

$$nT(r, f) \leq (m + 2)T(r, f) + (m + 1)T(r, g) + S_g(r) + S_f(r). \tag{5.7}$$

D'autre part, d'après le Théorème 2.3.1, on a $T(r, f^n + a_1 f^{n-m}) = nT(r, f) + S_f(r)$ et $T\big(r, c\big(g^n + a_2 g^{n-m}\big) + cb_2 - b_1\big) = nT(r, g) + S_g(r)$ et, puisque

$$f^n + a_1 f^{n-m} = c\big(g^n + a_2 g^{n-m}\big) + cb_2 - b_1,$$

on déduit que $T(r, g) = T(r, f) + S_f(r) - S_g(r)$. Par conséquent, d'après (5.7), on a

$$nT(r, f) \leq (2m + 3)T(r, f) + S_f(r) + S_g(r).$$

Mais, quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on a $S_f(r) = S_g(r)$ et donc, on voit que $n \leq 2m + 3$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $cb_2 - b_1 = 0$ implique $c = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Maintenant, puisque $cb_2 - b_1 = 0$, on en déduit que $g^{m-n}(f^n + a_1 f^{n-m}) = c(g^m + a_2)$. Donc, en posant $h = \dfrac{f}{g}$, on obtient

$$g^m(h^n - c) = -a_1 h^{n-m} + ca_2. \tag{5.8}$$

Supposons que $h^n - c \neq 0$. D'après (5.8), on a

$$g^m = \frac{-a_1 h^{n-m} + ca_2}{h^n - c}.$$

Remarquons que, puisque (f, g) est une paire de solutions admissibles de l'équation $\mathcal{E}$, on en déduit que $a_1, a_2, c \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1, a_2, c \in \mathcal{M}_g(d(0, R^-))\big)$ et donc, pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a $mT(r, g) \leq (2n - m)T(r, h) + S_g(r)$. Mais, comme $m \geq 2$, on a

$$T(r, g) \leq (2n - m)\ T(r, h) + S_g(r). \tag{5.9}$$

Par ailleurs, on va vérifier que $a_1, a_2, c \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1, a_2, c \in \mathcal{M}_h(d(0, R^-))\big)$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe une constante $M > 0$ et une suite

$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\Big($resp. une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,R[$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = R\Big)$ telles que

$$T(r_n,h) \leq M \;\; \max\big\{T(r_n,a_1),T(r_n,a_2),T(r_n,c)\big\}.$$

Donc, d'après (5.9), on a

$$T(r_n,g) \leq (2n-m)M \;\; \max\big\{T(r_n,a_1),T(r_n,a_2),T(r_n,c)\big\},$$

une contradiction quand n tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$ puisque $a_1,a_2,c \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1,a_2,c \in \mathcal{M}_g(d(0,R^-))\big)$. Par conséquent $\dfrac{ca_2}{a_1}, c \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\Big($resp. $\dfrac{ca_2}{a_1}, c \in \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\Big)$.

Supposons maintenant que $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n \neq c^{n-m}$. Si la fonction $\overline{Z}\Big(r, h^{n-m} - \dfrac{ca_2}{a_1};\; h^n - c\Big)$ n'est pas de la forme $S_h(r)$, il existe une constante $M>0$ et une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ $\Big($resp. une suite $\{r_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subset]0,R[$ où $\lim\limits_{s\to+\infty} r_s = R\Big)$ telles que

$$\overline{Z}\Big(r_s, h^{n-m} - \frac{ca_2}{a_1};\; h^n - c\Big) > M\;T(r_s,h) \quad\;\; \forall s \in \mathbb{N}. \tag{5.10}$$

Soit x_0 un zéro commun de $h^{n-m} - \dfrac{ca_2}{a_1}$ et $h^n - c$. Puisque $h^{n-m}(x_0) = \Big(\dfrac{ca_2}{a_1}\Big)(x_0)$ et $h^n(x_0) = c(x_0)$, on obtient

$$h^{(n-m)n}(x_0) = \big(h^{n-m}(x_0)\big)^n = \left(\frac{ca_2}{a_1}\right)^n(x_0) \quad\;\; \text{et} \quad\;\; h^{(n-m)n}(x_0) = \big(h^n(x_0)\big)^{n-m} = c^{n-m}(x_0).$$

Donc $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n(x_0) - c^{n-m}(x_0) = 0$, c'est-à-dire que x_0 est un zéro de $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n - c^{n-m}$. Par conséquent, d'après (5.10), on a

$$\overline{Z}\Big(r_s, \left(\frac{ca_2}{a_1}\right)^n - c^{n-m}\Big) > M\;T(r_s,h) \quad\;\; \forall s \in \mathbb{N},$$

une contradiction puisque $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n - c^{n-m} \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\Big($resp. $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n - c^{n-m} \in \mathcal{M}_h(d(0,R^-))\Big)$. Ainsi, la fonction $\overline{Z}\Big(r, h^{n-m} - \dfrac{ca_2}{a_1};\; h^n - c\Big)$ est de la forme $S_h(r)$. Mais $h = \dfrac{f}{g}$ et on sait que $T(r,f) = T(r,g) + S_g(r)$ donc $T(r,h) \leq 2T(r,g) + S_g(r)$. Par conséquent $\overline{Z}\Big(r, h^{n-m} - \dfrac{ca_2}{a_1};\; h^n - c\Big)$ est de la forme $S_g(r)$.

Remarquons que, comme $g^m = \dfrac{-a_1h^{n-m} + ca_2}{h^n - c}$, chaque zéro de $h^n - c$ d'ordre de multiplicité strictement inférieur à m n'est pas un zéro de g^m et donc il doit être un zéro de $h^{n-m} - \dfrac{ca_2}{a_1}$. Par conséquent, $\overline{Z}(r, h^n - c) - \overline{Z}_{m)}(r, h^n - c)$ est de la forme $S_g(r)$. De plus,

$\overline{Z}_{m)}(r, h^n - c) \leq \dfrac{1}{m}\ Z_{m)}(r, h^n - c)$ et $Z_{m)}(r, h^n - c) \leq T(r, h^n - c) \leq nT(r, h) + S_h(r)$. Alors, en appliquant le Corollaire 2.3.4.3 à h, on obtient

$$(n-2)T(r, h) \leq \overline{Z}(r, h^n - c) + S_h(r),$$

ce qui entraîne $(n-2)T(r, h) \leq \dfrac{n}{m} T(r, h) + S_g(r) + S_h(r)$. Donc, quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on a $n - 2 \leq \dfrac{n}{m}$, c'est-à-dire que $n(m-1) \leq 2m$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc montré que $\left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^n = c^{n-m}$.

D'autre part, comme $(n, m) = 1$, il existe s et t dans $\mathbb{N}$ tels que $sn + t(n-m) = 1$. En posant $u = c^s \left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^t$, on obtient $c = c^{sn} c^{t(n-m)} = c^{sn} \left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^{tn} = u^n$ et $\dfrac{ca_2}{a_1} = \left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^{sn} \left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^{t(n-m)} = c^{s(n-m)} \left(\dfrac{ca_2}{a_1}\right)^{t(n-m)} = u^{n-m}$. De plus, on voit clairement que $u \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$ $\big($resp. $u \in \mathcal{M}_h(d(0, R^-))\big)$.

Posons $h_1 = \dfrac{h}{u}$. En considérant que $\dfrac{ca_2}{a_1} = u^{n-m}$ et $c = u^n$, d'après (5.8), on a

$$(ug)^m = -a_1\ \frac{h_1^{n-m} + 1}{h_1^n - 1}.$$

Mais $a_1 \in \mathcal{M}_g(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1 \in \mathcal{M}_g(d(0, R^-))\big)$. Donc $a_1 \in \mathcal{M}_{ug}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1 \in \mathcal{M}_{ug}(d(0, R^-))\big)$ et alors, $a_1 \in \mathcal{M}_{h_1}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1 \in \mathcal{M}_{h_1}(d(0, R^-))\big)$.

D'autre part, comme $(m, n) = 1$, les équations $x^{n-m} - 1 = 0$ et $x^n - 1 = 0$ ont seulement une racine commune, $x = 1$, et $(n - m - 1) + (n - 1)$ racines différentes.

Soient β_i $\big(i = 1, ..., n - m - 1\big)$ les zéros de $x^{n-m} - 1$ différents de 1 et soient γ_j $\big(j = 1, ..., n - 1\big)$ les zéros de $x^n - 1$ différents de 1.

Fixons i. On a

$$\overline{Z}(r, h_1 - \beta_i) = \overline{Z}\big(r, h_1 - \beta_i : a_1(x) = 0\big) + \overline{Z}\big(r, h_1 - \beta_i : a_1(x) \neq 0\big).$$

Quand $a(x) \neq 0$, on voit que tout zéro de $h_1 - \beta_i$ est d'ordre au moins m et donc, on obtient $\overline{Z}\big(r, h_1 - \beta_i : a_1(x) \neq 0\big) \leq \dfrac{1}{m} Z(r, h_1 - \beta_i)$, ce qui entraîne

$$\overline{Z}(r, h_1 - \beta_i) \leq \frac{1}{m} Z(r, h_1 - \beta_i) + Z(r, a_1).$$

Mais $a_1 \in \mathcal{M}_{h_1}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $a_1 \in \mathcal{M}_{h_1}(d(0, R^-))\big)$. Donc

$$\overline{Z}(r, h_1 - \beta_i) \leq \frac{1}{m} Z(r, h_1 - \beta_i) + S_{h_1}(r).$$

De même pour les zéros de $h_1^n - 1$. Tout zéro de $h_1 - \gamma_j$ est un pôle d'ordre au moins m de $(ug)^m$ sauf peut-être si c'est un pôle de a_1, d'où $\overline{Z}(r, h_1 - \gamma_j) \leq \dfrac{1}{m} Z(r, h_1 - \gamma_j) + S_{h_1}(r)$. Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.2.4 à h_1, on obtient

$$\big((2n - m - 2) - 1\big)T(r, h_1) \leq \sum_{i=1}^{n-m-1} \overline{Z}(r, h_1 - \beta_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \overline{Z}(r, h_1 - \gamma_i) + \overline{N}(r, h_1) + S_{h_1}(r),$$

d'où $(2n - m - 3)\ T(r, h_1) \leq \left(\dfrac{2n - m - 2}{m} + 1\right)\ T(r, h_1) + S_{h_1}(r)$. Donc, quand r tend vers $+\infty$ $\big($resp. vers $R^-\big)$, on a $(2n - m - 3)m \leq 2n - 2$, ce qui entraîne $n \leq \dfrac{m^2 + 3m - 2}{2(m-1)}$. Mais l'hypothèse $n \geq 2m + 3$ et $m \geq 2$ implique $n > \dfrac{m^2 + 3m - 2}{2(m-1)}$, une contradiction. Par conséquent, on en déduit que $h^n - c = 0$. Ainsi, d'après (5.8), on a $h^{n-m} = \dfrac{ca_2}{a_1}$, ce qui entraîne $h^m = \dfrac{a_1}{a_2}$. $\square$

Table de Symboles

Bibliographie

[1] Amice Y., Les nombres p-adiques, *Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien",* 14 (1975).

[2] An T. T. H. et Ha H. K., On uniqueness polynomials and bi-urs for p-adic meromorphic functions, *Journal Number Theory,* 87, 211-221 (2001).

[3] An T. T. H., Wang J. T-Y. et Wong P-M., Strong uniqueness polynomials : the complex case, *Complex Var. Theory Appl.,* 49(1), 25-54 (2004).

[4] An T. T. H. et Wang J. T-Y., Unique range sets for non-archimedean entire functions in positive characteristic field, *Ultrametric Functional Analysis, Contemporary mathematics, AMS,* 384 (2005).

[5] An T. T. H., Wang J. T-Y. et Wong P-M., Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic field II, *Acta Arithmetica,* 116(2), 115-143 (2005).

[6] An T. T. H. et Wang J. T-Y., Unique range sets and uniqueness polynomials for algebraic curves, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 359(3) (2007).

[7] Bartels S., Meromorphic function sharing a set with 17 elements, ignoring multiplicities, *Complex Variable Theory and Application.* 39(1), 85 - 92 (1999).

[8] Bergweiler W. et Eremenko A., On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order, *Rev. Mat. Iberoamericana* 11, 355 - 373 (1995).

[9] Berkovich V., Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields, *Math. Surveys Monogr.* 33, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (1990).

[10] Boutabaa A., Théorie de Nevanlinna p-adique, *Manuscripta Math.* 67, 251 - 269 (1990).

[11] Boutabaa A., Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique, *Collectanea Mathematica* 42(1), 75 - 93 (1991).

[12] Boutabaa A., Escassut A. et Haddad L., On uniqueness of p-adic entire functions, *Indagationes Mathematicae* 8, 145 - 155 (1997).

[13] Boutabaa A. et Escassut A., On uniqueness of p-adic meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(9), 2557 - 2568 (1998).

[14] Boutabaa A. et Escassut A., Applications of the p-adic Nevanlinna Theory to functional equations, *Ann. Inst. Fourier* 50, 751 - 766 (2000).

[15] Boutabaa A. et Escassut A., Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc, *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society* 44, 485 - 504 (2001).

[16] Boutabaa A. et Escassut A., Urscm or Bi-urscm for p-adic analytic or meromorphic functions inside a disc, *preprint (to appear in)* (2007).

[17] Chen H. H. et Fang M. L., On the value distribution of $f'f^n$, *Science in China (Serie A)* 38(7), 789 - 798 (1995).

[18] Cherry W. et Yang C. C., Uniqueness of non-archimedean entire functions sharing sets of values counting multiplicities, *Proceeding of the AMS* 127, 967 - 971 (1999).

[19] Cherry W. et Wang J. T-Y., Uniqueness polynomials for entire functions, *Internat. J. Math.* 13, 323 - 332 (2002).

[20] Clunie J., On a result of Hayman, *J. London Math. Soc.* 42, 389 - 392 (1967).

[21] Escassut A., Analytic Elements in p-adic Anaysis, *World Scientific Publishing* (1995).

[22] Escassut A., Haddad L. et Vidal R., Urs, Ursim and Non-Urs for p-adic functions and polynomials, *Journal of Number Theory* 75, 133 - 144 (1999).

[23] Escassut A. et Yang C. C., The functional equations $P(f) = P(g)$ in a p-adic field, *Journal of Number Theory* 105, 344 - 360 (2004).

[24] Escassut A., Meromorphic functions of uniqueness, *Bulletin des Sciences Mathématiques,* 131(3), 219 - 241 (2007).

[25] Escassut A., Tutschke W. et Yang C. C., Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and P-adic Analysis, *Mathematics Monograph Series 11, Science Press Beijing* (2008).

[26] Escassut A., Ojeda J. et Yang C. C., Functional Equations in a p-adic Context, *preprint (soumis à J. of Math. Analysis and Applications)* (2008).

[27] Escassut A. et Ojeda J., Exceptional values of p-adic analytic functions and derivatives, *preprint (soumis à Complex Variables and Elliptic Equations)* (2008).

[28] Fang M. L. et Hua X. H., Entire functions that share one value. *J. Nanjing Univ. Math. Biq.* 13(1), 44 - 48 (1996).

[29] Fang M. et Hong W., A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomials, *Indian J. Pure Appl. Math.* 32(9), 1343 - 1348 (2001).

[30] Frank G. et Reinders M., A unique range set for meromorphic functions with 11 elements, *Complex Variable Theory Appl.* 37, 185 - 193 (1998).

[31] Fujimoto H., On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, *Amer. J. Math.* 122(6), 1175-1203 (2000).

[32] Garandel G., Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indagationes Mathematicae* 37(4), 327 - 341 (1975).

[33] Ha H. K. et Yang C. C., On the functional equation P(f)=Q(g), *Value distribution theory and related topics, ACAA, Kluwer Academic Publishers*, 201-208 (2004).

[34] Hayman W. K., Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Ann. of Math.* 70, 9 - 42 (1959).

[35] Hayman W. K., Meromorphic Functions, *Clarendon Press, Oxford.* (1964).

[36] Hayman W. K., Reseach Problems in Function Theory, *The Athlone Press, London.* (1967).

[37] Hoa N. T., On the functional equation $P(f) = Q(g)$ in non-archimedean field, *Acta Math. Vietnam.* 31(2), 167 - 180 (2006).

[38] Hu P. C. et Yang C. C., A survey on p-adic Nevanlinna theory ans its applications to differential equations, *Taiwanese J. of Math.* 3, 1 - 34 (1999).

[39] Hu P. H. et Yang C. C., Meromorphic functions over non archimedean fields, *Kluwer Academy Publishers* (2000).

[40] Hu P. H., Li P. et Yang C. C., Unicity of Meromorphic Mapping, *Advances in Complex Analysis and Its Applications, Kluwer, Academic Publishers* (2003).

[41] Hua X. et Yang C. C., Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 22, 395 - 406 (1997).

[42] Hua X. et Yang C. C., Unique polynomials of entire and meromorphic functions, *Matemeticheskaia Fizika Analys Geometriye* 4(3), 391 - 398 (1997).

[43] Lahiri I. et Mandal N., Uniqueness of nonlinear differential polynomials sharing simple and double 1-points, *Int. J. Math. Math. Sci.* 12, 1933 - 1942 (2005).

[44] Lazard M., Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, *IHES Publ. Math.* 14, 47 - 75 (1962).

[45] Li P. et Yang C. C., Some further results on the unique range sets of meromorphic functions. *Kodai Math. J.* 18, 437 - 450 (1995).

[46] Li P. et Yang C. C., Some further results on the functional equation : P(F)=Q(G). *Value distribution theory and related topics. ACAA, Kluwer Academic Publishers*, 219-232 (2004).

[47] Li P. et Yang C. C., Admissible Solutions of Functional Equations of Diophantine Type. *Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis (To appear in Science Press).*

[48] Lin W. et Yi H., Uniqueness theorems for meromorphic functions concerning fixed-points. *Complex Var. Theory Appl.* 49(11), 793 - 806 (2004).

[49] Mayerhofer E., Rational descomposition of p-adic meromorphic functions, *Sci. Math. Jpn.* 61(1), 1 - 13 (2005).

[50] Mues E., Uber ein Problem von Hayman, *Math. Z* 164, 239 - 259 (1979).

[51] Mues E. et Reinders M., Meromorphic functions sharing one value and unique range sets, *Kodai Math. J.* 18, 515 - 522 (1995).

[52] Ojeda J., Applications of the p-adic Nevanlinna theory to problems of uniqueness, *The Journal of Analysis (Madras)* 13, 41-65 (2005).

[53] Ojeda J., On Hayman's conjecture over p-adic fields, *à paraître dans Taiwanese Journal of Mathematics* 12(9), (2008).

[54] Ojeda J., Zéros of ultrametric meromorphic functions $f'f^n(f-a)^k-\alpha$, *Asian-European Journal of Mathematics* 1(3), 415 - 429 (2008).

[55] Ojeda J., Uniqueness for ultrametric meromorphic functions $f'P'(f)$ sharing a small function, *(soumis à Journal of the Australian Mathematical Society)*, (2008).

[56] Picard E., Traité d'analyse II, *Gauthier-Villars, Paris*(1925).

[57] Qu H. et Xu Y., Entire functions sharing one value IM. *Indian J. Pure Appl. Math.* 31(7), 849 - 855 (2000).

[58] Yamanoi K., The second main theorem for small functions and related problems. *Acta Math.* 192, 225 - 294 (2004).

[59] Yang C. C. et Yi H. X., Uniqueness theorems of meromorphic functions. *Pure and applied Math. Monographs, Science Press* 32 (1995).

DISTRIBUTION DE VALEURS DES FONCTIONS MEROMORPHES ULTRAMETRIQUES, APPLICATION DE LA THEORIE DE NEVANLINNA

On étudie des propriétés des fonctions méromorphes dans un corps ultramétrique complet, algébriquement clos de caractéristique nulle qu'on note $\mathbb{K}$ (ex: $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$) ainsi que des propriétés de fonctions méromorphes dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$, prenant en compte pour cela le problème de Lazard, qu'on contourne en considérant une extension de $\mathbb{K}$ sphériquement complète.

Les problèmes étudiés concernent d'une part la distribution des zéros, les valeurs exceptionnelles, pour différents types de fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$, avec notamment *la Conjecture de Hayman.* Et d'autre part, des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$, qui satisfont certaines hypothèses: des fonctions du type $(P \circ f)'$ et $(P \circ g)'$ où P est un polynôme qui satisfait certains conditions, ces fonctions partagent une autre fonction méromorphe qui est petite par rapport à f et g, en comptant les multiplicités. Ce dernier type de problèmes comporte naturellement des liens avec les problèmes portant sur les polynômes d'unicité pour des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$, et sur les ensembles d'unicité (URS), en particulier on étudie des fonctions de la forme $f^n f'$ et $g^n g'$ qui partagent une constante, en comptant ou non les multiplicités. Finalement, on s'intéresse à l'existence ou non de solutions des équations fonctionnelles du type Diophantien: des équations fonctionnelles du type $P(x) = Q(y)$ où P et Q sont des polynômes dont les coefficients sont des fonctions méromorphes. On donne des conditions suffisantes pour montrer qu'il n'existe aucune paire de *solutions admissibles* pour ces type d'équations et, si elles existent, elles ont alors une forme très particulière.

La méthode la plus utilisée est la Theórie de Nevanlinna p-adique qui s'applique non seulement à des fonctions méromorphes ultramétriques dans le corps $\mathbb{K}$ mais aussi aux fonctions méromorphes ultramétriques *non bornées* dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$. Les théorèmes les plus fréquemment utilisés sont: le *Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna ultramétrique*, le *Théorème de Nevanlinna sur trois petites fonctions* et *L'inégalité de Milloux ultramétrique.*

Most-Clés: Distribution de valeurs des fonctions meromorphes ultramétriques, Fonction méromorphe ultramétrique, Théorie de Nevanlinna p-adique, Distribution des zéros, Unicité des fonctions, Solution admissible.

VALUE DISTRIBUTION OF ULTRAMETRIC MEROMORPHIC FUNCTION, APPLICATION OF NEVANLINNA'S THEORY

We study properties of meromorphic functions in a complete ultrametric algebraically closed field of characteristic zero that we denote $\mathbb{K}$ $\big($ex: $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p\big)$ and similar properties in an open disk of $\mathbb{K}$, taking into account Lazard's problem, that we avoid considering a spherically complete extension of $\mathbb{K}$.

On one hand, the problems studied concern the distribution of zeroes, exceptional values, for various type of ultrametric meromorphic functions in $\mathbb{K}$ or inside an open disk of $\mathbb{K}$ and particularly *Hayman's Conjecture* in an ultrametric field. On the other hand, problems of uniqueness are examined for meromorphic functions in the whole field $\mathbb{K}$ or in an open disk of $\mathbb{K}$ satisfying certain hypotheses: functions of the form $(P \circ f)'$ and $(P \circ g)'$ where P is a polynomial satisfying certain condition and sharing a small function with respect to f and g, counting multiplicities. This last type of problems show some connections with questions on polynomial of uniqueness for meromorphic functions and with questions on Unique Range Sets (URS), particularly we study functions of the form $f^n f'$, $g^n g'$ sharing a constant, counting or not multiplicities. Finally, we look for the existence of solutions of functional equations of Diophantine type: functional equation such as $P(x) = Q(y)$ where P and Q are polynomials whose coefficients are meromorphic functions. Sufficient conditions are given in order to show that there exist no pair of *admissible solutions* for such equations or in certain cases, solutions exist with a very particular form.

The most used method is the p-adic Nevanlinna Theory which no only applies to ultrametric meromorphic functions in the whole field $\mathbb{K}$, but also applies to *unbounded* meromorphic functions inside an open disk. The most used theorems are: the *Ultrametric Nevanlinna's second main theorem*, the *Ultrametric Nevanlinna's theorem on 3 small functions* and the *Ultrametric Milloux's inequality.*

Key Words: Value distributions of ultrametric meromorphic functions, P-adic Nevanlinna's theory, Zeros distribution, Functions uniqueness, Admissible solution.